再品佳题

2019 波罗的海之路数学竞赛

中图分类号:G424.79　文献标识码:A　文章编号:1005-6416(2022)07-0035-07

1. 已知非负实数 x、y、z 满足 $x \geqslant y$. 证明:

$$\frac{x^3-y^3+z^3+1}{6} \geqslant (x-y)\sqrt{xyz}. \quad ①$$

2. 设数列 $\{F_n\}$ 满足:

$F_1=F_2=1$,

$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}(n \geqslant 2)$. ①

求所有满足 $5F_x-3F_y=1$ 的正整数组 (x,y).

3. 求所有的函数 $f:\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 满足

$f(xf(y)-y^2)=(y+1)f(x-y)$.

4. 求所有的正整数 n,使得存在正整数 $k \geqslant 2$,对于正整数 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 满足:

$$\sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1}=n, \sum_{i=1}^{k} x_i=2\ 019.$$

5. 黑板上写有 $2m$(整数 $m \geqslant 2$)个数:

$1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \cdots, 2m(2m+1)$.

每次操作选择其中三个数 a、b、c,把它们擦掉并写上 $\frac{abc}{ab+bc+ca}$. 经过 $m-1$ 次操作后,黑板上只剩下了两个数. 证明:若其中一个数为 $\frac{4}{3}$,则另一个必大于 4.

6. 爱丽丝、鲍勃两人玩游戏. 他们将四张卡片分别写上 $x+y$、$x-y$、x^2+xy+y^2、x^2-xy+y^2 四个表达式. 将这四张卡片扣在桌子上,随机选一张翻面,亮出上面的表达式. 爱丽丝可以挑选四张卡片中的两张,并将其余两张递给鲍勃,挑选之后亮出全部四张卡片. 爱丽丝可以对变量 x 或 y 中的一个进行赋值(实数),并告诉鲍勃她对哪个变量赋了什么值. 之后,鲍勃对另一个变量赋值(实数). 最终,他们各自计算自己两张卡片上值的乘积,乘积更大的人获胜. 请问:谁有必胜策略?

7. 求最小的整数 $k \geqslant 2$,使得将 $\{2,3,\cdots,k\}$ 任意划分为两个集合,其中至少有一个集合中包含着 a、b、c(允许相同),满足 $ab=c$.

8. 有 2 019 座城市,一些城市通过互不相交的双向道路连接,每条道路恰连接两座城市. 对于每一对城市 A、B,至多经过一座其他城市就能从 A 到达 B;有 62 名警察合作抓小偷,每晚警察可以选择留在自己的城市或移动到相邻的城市,每个白天小偷也可以选择留守或者移动,且警察和小偷任何时候都知道彼此位置. 若存在某时刻,警察和小偷在同一城市,则小偷被抓住. 证明:这些警察总能抓住小偷.

9. 已知 n 为正整数,考虑所有的不增函数 $f:\{1,2,\cdots,n\} \rightarrow \{1,2,\cdots,n\}$. 这些函数中,有些有不动点,有些则没有. 求这两种函数的个数之差.

10. 平面上有 2 019 个点,过这些点画圆,称一种绘制方式是"k—好的"当且仅当绘制 k 个圆将平面分为若干个封闭图形,且不存在一个封闭图形内有两点. 求 k 的最小值,使得无论怎样排列这 2 019 个点,总存在一种 k—好的绘制方式.

11. 在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,M 为边 BC 的中点. 分别以 AC、BM 为直径的圆交于点 M、P,MP 与 AB 交于点 Q,R 为 AP 上一点,满足 $QR // BP$. 证明:CP 平分 $\angle RCB$.

12. 在 $\triangle ABC$ 中,H 为垂心,点 D 在边 AC 上,点 E 在边 BC 上,且满足 $BC \perp DE$. 证明:$EH \perp BD$ 的充分必要条件是 BD 平分 AE.

13. 在凸六边形 $ABCDEF$ 中,$AB=AF$,$BC=CD$,$DE=EF$,$\angle ABC=\angle EFA=90°$. 证

明:$AD\perp CE$.

14. 在$\triangle ABC$中,$\angle ABC=90°$,$BH\perp AC$于点H,M、N分别为AH、CH的中点,MN的中点为D,直线BM、BN与$\triangle ABC$的外接圆Γ的第二个交点分别为P、Q. 证明:AQ、CP、BD三线共点.

15. 设$n\geqslant 4$. 考虑平面多边形$P_1P_2\cdots P_n$(不一定为凸的). 对于每个点$P_k(k=1,2,\cdots,n)$,均存在唯一的点Q_k(与P_k不重合,且Q_k在$P_1,P_2,\cdots,P_n$中)距离P_k最近. 若对于所有的k,均满足

$Q_k\neq P_{k+1}$或$P_{k-1}(P_0=P_n,P_{n+1}=P_1)$,

则称该多边形为"劲敌".

(1)证明:不存在凸的劲敌多边形;

(2)求所有的$n\geqslant 4$,使得存在一个劲敌n边形.

16. 对于正整数N,设$f(N)$为使得$\frac{ab}{a+b}$是N的因数的有序整数对(a,b)的个数. 证明:$f(N)$恒为完全平方数.

17. 设p为奇素数. 证明:对于任意的整数c,均存在整数a,使得

$a^{\frac{p+1}{2}}+(a+c)^{\frac{p+1}{2}}\equiv c(\bmod p)$.

18. 已知a、b、c为正奇数,a不为完全平方数,且满足

$a^2+a+1=3(b^2+b+1)(c^2+c+1)$.

证明:b^2+b+1、c^2+c+1中至少有一个为合数.

19. 证明:$7^x=1+y^2+z^2$无正整数解.

20. 已知整系数多项式$P(x)$满足:

$P(-1)=-4,P(-3)=-40$,

$P(-5)=-156$.

问:最多有多少个x满足$P(P(x))=x^2$?

参考答案

1. 注意到,

$x^3-y^3+z^3+1$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+z^3+1$.

分两种情况考虑.

(1)当$x=y$时,

式①左边$\geqslant\frac{1}{6}$,式①右边$=0$,

显然成立.

(2)当$x>y$时,

式①

$$\Leftrightarrow(x^2+xy+y^2)+\frac{z^3+1}{x-y}\geqslant 6\sqrt{xyz}. \quad ②$$

由均值不等式,结合$\frac{(z^3+1)^2}{4}\geqslant z^3$得

式②左边

$$=(x-y)^2+3xy+\frac{z^3+1}{2(x-y)}+\frac{z^3+1}{2(x-y)}$$

$$\geqslant 3xy+3\sqrt[3]{\frac{(z^3+1)^2}{4}}$$

$$\geqslant 3xy+3z\geqslant 6\sqrt{xyz}.$$

因此,原命题成立.

2. 由题意,知对于任意的$n\geqslant 2$,均有

$F_{n+1}>F_n$.

注意到,$F_n\in\mathbf{Z}_+$,$F_3=2,F_4=3,F_5=5,F_6=8,F_7=13,\cdots$

当$x=1,2$时,不存在满足$5F_x-3F_y=1$的F_y.

当$x=3$时,此时要使$5F_3-3F_y=1$成立,则$F_y=3$,即$y=4$.

于是,$(x,y)=(3,4)$满足要求.

由$5F_x-3F_y=1$,知$y>x$.

若$x+1=y$,则式①化简得

$F_{x-2}-F_{x-3}=1(x\geqslant 4)$.

故$x-2=3$或$4\Rightarrow x=5$或6.

于是,$(x,y)=(5,6)$或$(6,7)$满足要求.

若$y\geqslant x+2$,则

$5F_x-3F_y\leqslant 5F_x-6F_x<0$,

矛盾.

综上,$(x,y)=(3,4)$或$(5,6)$或$(6,7)$.

3. 在原方程中,用$x+y$代替x可得

$$f((x+y)f(y)-y^2)=(y+1)f(x). \quad ①$$

在式①中令$y=-1,x=1$,得$f(-1)=0$.

若函数f除-1外有另一个零点c,则在式①中令$y=c$,有

$f(-c^2)=(c+1)f(x)$

对于任意的x成立,于是,$f(x)$为常函数.

故 $f(x)=f(-1)=0$,代入检验知成立.

若函数只有一个零点,则在式①中令 $x=-1$,有

$f((-1+y)f(y)-y^2)=0.$

故 $(-1+y)f(y)-y^2=-1.$

从而,当 $y\neq 1$ 时, $f(y)=y+1.$

令 $x=-\frac{1}{3}, y=2$,代入式①有 $f(1)=2.$

因此, $f(x)=x+1.$

综上, $f(x)=x+1$ 或 $f(x)=0.$

4. $n=\sum\limits_{i=1}^{k-1}x_ix_{i+1}$

$\leqslant(x_1+x_3+\cdots)(x_2+x_4+\cdots)$

$=(x_1+x_3+\cdots)(2\,019-x_1-x_3-\cdots)$

$\leqslant 1\,009\times 1\,010=1\,019\,090$

$\Rightarrow n\leqslant 1\,019\,090.$

当 $x_1=1\,009, x_2=1\,010, k=2$ 时, n 可取到 $1\,019\,090$.

设 x_s 为所有 x 中最小数.

则 $n\geqslant x_s\left(\sum\limits_{i=1}^{k}x_i-x_s\right)=x_s(2\,019-x_s)$

$\geqslant 2\,018,$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_{2\,019}=1$ 时,上式等号成立.

设 $S=\{x \mid x\in\mathbf{Z}_+, 2\,018\leqslant x\leqslant 1\,009\times 1\,010\}$. 下面证明 n 的值域为 S.

将 S 划分为 1 008 个分拆:

$S_{2\,018}=\{x \mid x\in\mathbf{Z}, 1\,008\times 1\,011\leqslant x\leqslant 1\,009\times 1\,010\}.$

$S_i=\{x \mid x\in\mathbf{Z}, i(2\,019-i)\leqslant x<(i+1)(2\,018-i)\},$

其中, $i=1,2,\cdots,1\,008.$

$n=1\,009\times 1\,010$ 时,构造已给出,若 $t\in S_i$ 且 $t\neq 1\,009\times 1\,010$,设

$t=(i+1)(2\,018-i)-a,$

$a\in[1,2\,018-2i],$

取 $k=4, x_1=1, x_2=2\,018-i-a, x_3=i, x_4=a$,此时,

$n=(i+1)(2\,018-i)-a.$

从而,证明了对于 S 中的每个数均存在 k 和 x_i 符合题意.

因此,所求正整数 $n\in[2\,018,1\,019\,090]$.

5. 注意到,

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{abc}{ab+bc+ca}}}\text{}$$

$$\frac{1}{\dfrac{abc}{ab+bc+ca}}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

即一次操作后,黑板上所有数的倒数之和仍保持不变,记这个和为 S. 则

$$S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{2m(2m+1)}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2m}-\frac{1}{2m+1}$$

$$=1-\frac{1}{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}.$$

故黑板上剩下的另一个数的倒数

$$\frac{1}{t}=S-\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{2m-3}{8m+4}<\frac{2m+1}{8m+4}=\frac{1}{4}.$$

因为 $m\geqslant 2$,所以,

$0<\frac{1}{t}<\frac{1}{4}\Rightarrow t>4.$

因此,命题成立.

6. 爱丽丝有必胜策略.

首先,用 A、B 分别代表爱丽丝、鲍勃手中两张卡片之积.

若 $x-y$ 或 $x+y$ 被亮出,则任取暗置的两张,反之,则取一暗一亮的两张. 这样保证爱丽丝不会同时拿到 $x-y$、$x+y$.

若鲍勃同时拿到 $x-y$、$x+y$,则爱丽丝可以取 $y=1$,此时,

$A=(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

$=x^4+x^2+1,$

$B=(x-y)(x+y)=x^2-y^2=x^2-1,$

则 $A-B=x^2+2>0$,爱丽丝获胜.

若 $B=(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$,

$A=(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$,

则爱丽丝取 $y>0$ 即可.

若 $A=x^3-y^3, B=x^3+y^3$,则爱丽丝取 $y<0$ 即可.

若 $A=(x-y)(x^2-xy+y^2)$,

$B=(x+y)(x^2+xy+y^2)$,

则 $A-B=-4x^2y-2y^3=-2y(y^2+2x^2)$,此时爱丽丝取 $y<0$ 即可.

若 $A=(x+y)(x^2+xy+y^2)$,

$B=(x-y)(x^2-xy+y^2)$,

则 $A-B=4x^2y+2y^3=2y(y^2+2x^2)$,此时爱丽丝取 $y>0$ 即可.

综上,爱丽丝有必胜策略.

7. 首先给出 $k=31$ 时的反例.

取 $A=\{2,3,16,17,\cdots,31\}$,

$B=\{4,5,\cdots,15\}$.

若 $k<31$,则在 A 和 B 中分别去掉大于 k 的整数即可.

下面证明 $k=32$ 时,题中结论成立.

反之,若结论不成立,则 2、4 和 4、16 分别不在同一集合. 于是,2、16 在同一集合. 类似地,4、8 在同一集合. 此时,32 无法在任意集合($32=2\times16=4\times8$).

因此,k 的最小值为 32.

8. 考虑普遍情况.

若有 n 座城市,下面证明:至多需要

$$k=\left\lceil\sqrt{2n+8+\frac{1}{2}}-\frac{5}{2}\right\rceil$$

名警察,就一定可以抓住小偷,其中,$\lceil x\rceil$ 表示不小于实数 x 的最小整数.

引理　设图 G 的直径为 2,H 为 G 的子图,且存在一点的度为 k. 小偷只能在图 H 中移动(或留守),而警察可以在整个图 G 中移动(或留守). 则此时 k 名警察可以抓住小偷.

证明　设小偷(移动或留守后)在顶点 v_0 处,警察分别在顶点 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 处,$\{v_1,v_2,\cdots,v_l\}$ $(l\leqslant k)$ 为 v_0 在 H 中的邻域.

警察从 u_i 移动到 $v_i(i=1,2,\cdots,l)$ 至多只需要两次. 于是,警察至多只需移动一次便可"控制"$u_i(i=1,2,\cdots,l)$(即处于 u_i 的邻域). 若下一个白天小偷移动了,则小偷将被抓住;若小偷留在 v_0,则接下来警察就会分别移动到 $v_1,v_2,\cdots,v_l$,再次轮到警察移动时便一定可以抓住小偷.

引理得证.

若图 G 中有一个顶点的度 v 不超过 k,则由引理知此时 k 名警察总可以抓住小偷.

故不妨设图 G 中每个点的度均至少为 $k+1$. 此时,在 v_0 处部署警察,该警察不再移动. 若小偷在 v_0 及其邻域中,则其必被抓住. 故可以删去 v_0 及所有与之相邻的点. 删去点后的图 H_1 至多有 $n-k-2$ 个顶点,且小偷只能在 H_1 中移动(或留守).

若 H_1 中存在一点的度不超过 $k-1$,由引理知结论成立. 不妨设 H_1 中点的度均至少为 k. 再取 $v_1\in H_1$,在此处部署警察,且不再移动. 然后删去 v_1 及所有与之相邻的点,得到图 H_2.

继续操作,第 j 次操作后,图 H_j 至多有 $n-(k+2)-(k+1)-\cdots-(k+3-j)$ 个顶点,且部署了 j 名警察. 在操作过程中,若在某步操作结束后,满足引理的使用条件,则由引理得证. 从而,不妨设已经进行了 $k-1$ 次操作,且一直不满足引理的使用条件. 此时,图 H_{k-1} 有 $n-(k+2)-(k+1)-\cdots-4$ 个顶点,且还有一名警察未部署. 若此时图 H_{k-1} 中只有两个顶点,则 H_{k-1} 中的点的度至多为 1,由引理得证;若 H_{k-1} 中有多于两个顶点,即

$$n-(k+2)-(k+1)-\cdots-4>2,$$

则 $k<\sqrt{2n+8+\frac{1}{2}}-\frac{5}{2}$,矛盾.

从而,至多需要 $k=\left\lceil\sqrt{2n+8+\frac{1}{2}}-\frac{5}{2}\right\rceil$ 名警察,就一定可以抓住小偷.

最后,当 $n=2\ 019$ 时,$k=62$.

故原题得证.

9. 注意到,f 至多有一个不动点.

首先利用插板法,可得到不增函数 f 的个数为 $C_{n-1+n}^{n-1}=C_{2n-1}^{n-1}$.

若函数 f 存在不动点,即存在 c,满足 $f(c)=c$.

当不动点为 c 时,将其分为 $[1,c-1]$ 和 $[c+1,n]$ 两部分并运用插板法求不增函数个数,则这样的 f 的个数为

$$C_{n-c+c-1-1}^{c-1}C_{c-1+n-c+1}^{n-c}=(C_{n-1}^{c-1})^2.$$

于是,有不动点的 f 的个数为

$$\sum_{c=1}^{n}(C_{n-1}^{c-1})^2=C_{2n-2}^{n-1}.$$

从而,没不动点的 f 的个数为

$$C_{2n-1}^{n-1}-C_{2n-2}^{n-1}=C_{2n-2}^{n-2}.$$

故所求为 $C_{2n-2}^{n-1}-C_{2n-2}^{n-2}=\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}$.

10. 先证明 $k\geqslant1\ 010$.

取 2 019 个在同一直线上的点，显然，这条线上的 2 019 个点中至少需要被圆经过 2 018 次.

又由于每个圆至多过线上的 2 019 个点中两次，于是，若 $k\leqslant 1\ 009$，则这 k 个圆周所过的点数不超过 2 018. 注意到取等时首、尾两点均未在任何圆内，矛盾.

下面加强证明无论怎样排列这 2 019 个点，总存在一种 1 010—好的绘制方式.

加强命题为“证明：存在一种 1 010—好的绘制方式，使得这 1 010 个圆过同一个点.”

以平面上与这 2 019 个点不重合，且不在任意三点的外接圆上的点为反演中心进行反演变换. 则反演后欲证加强命题，只需证明：对于平面上 2 019 个不共线的点，存在 1 010 条线使得每两点之间至少有一条线.

称一条线将点集“平分”当且仅当这条直线两边的点个数差 1 或相等.

引理 对于任意两个点集 A、B，存在直线 l 将 A、B 平分.

证明 称被一条直线分割的两个平面之一为一个半平面. 显然，存在一个半平面包含 A 与 B 各一半点，即

$2\times$半平面中 A 的点数 $-|A|\leqslant 1$.

易知，存在半平面使得其包含少于一半 B 中元素和一半 A 中元素；存在半平面使得其包含多于一半 B 中元素和一半 A 中元素；存在一种转动和平移半平面的方式使得可以由任意包含一半 A 中元素的半平面平移到另一种，且平移旋转路线途中均为半平面. 于是，由介值定理，命题得证.

称一个区域为包括给定点的由直线封闭而成的图形，一个区域的模为这个区域内点的个数.

先连接一个足够大的多边形围起来所有点，显然，一开始仅有一个区域.

考虑按顺序画出的 1 010 条直线. 考虑使每条直线平分当前两个模最大的区域，设这是一次操作. 下面证明这个操作可以进行 1 010 次.

第一次操作产生了一个新区域，此后每次操作产生两个新区域.

由归纳法易知模最大的区域的模不大于两倍的模最小的区域的模，于是，若有模为 1 的区域则其他区域模必为 1 或 2.

从而，停止最后一次操作时至多有一个模为 2 的区域，由奇偶性易知此时有 2 018 个区域，画了 1 009 条线. 再画一条线将剩下在同一区域的两点分开即可. 因此，证明了可以依次绘制 1 010 条封闭图形，使得不存在一个封闭图形内有两点. 命题得证.

11. 如图 1.

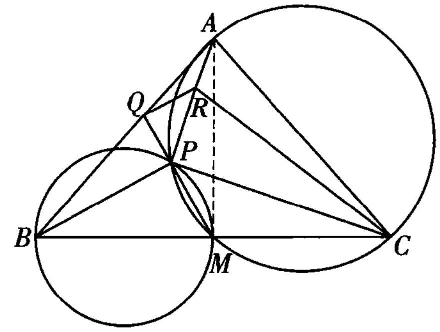

图 1

由 A、C、M、P 四点共圆

$\Rightarrow\angle RPQ=\angle ACM$.

结合 $\angle PQR=90^\circ=\angle CMA$ 知

$\triangle PQR\backsim\triangle CMA\Rightarrow\dfrac{PR}{PQ}=\dfrac{CA}{CM}$.

类似地，$\angle PAC=\angle PMB$，

$\angle CPA=90^\circ=\angle BPM$.

则 $\triangle CPA\backsim\triangle BPM$

$\Rightarrow\dfrac{CP}{BP}=\dfrac{CA}{BM}=\dfrac{CA}{CM}=\dfrac{PR}{PQ}$.

又 $\angle QPB=90^\circ=\angle RPC$，于是，

$\triangle QPB\backsim\triangle RPC$

$\Rightarrow\angle RCP=\angle PBQ=\angle CBA-\angle MBP$

$=\angle ACB-\angle ACP=\angle PCB$

$\Rightarrow CP$ 平分 $\angle RCB$.

12. 如图 2，设 AH 与 BD 交于点 F.

则 $AF/\!/DE$.

充分性.

于是，BD 平分 AE 等价于四边形 $ADEF$ 为平行四边形，则 $EF/\!/AC$.

又 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，从而，$BH\perp EF$.

故 H 也为 $\triangle BEF$ 的垂心.

因此，$EH\perp BD$.

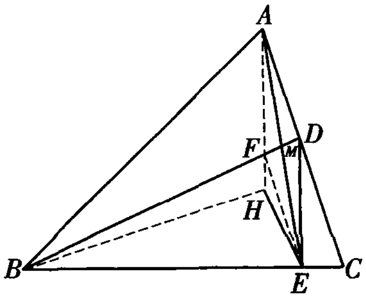

图2

必要性.

在上述证明过程中,每一步均是等价的.因此,若 $EH\perp BD$,则亦有 BD 平分 AE.

13. 如图3.

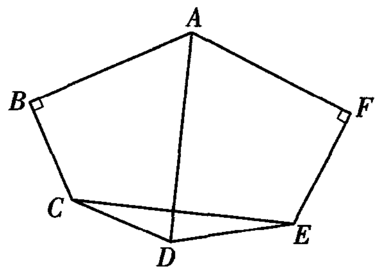

图3

由 AC^2-AE^2

$=(AB^2+BC^2)-(AF^2+FE^2)$

$=BC^2-FE^2=DC^2-DE^2$

$\Rightarrow AD\perp CE$.

14. 如图4,设 BD 与圆 Γ 的第二个交点为 J,联结 PQ.

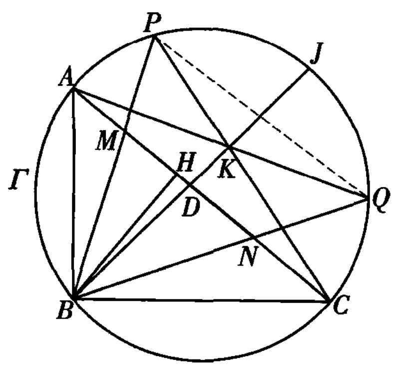

图4

对$\triangle BPQ$,运用角元塞瓦定理和正弦定理知

PC、QA、BJ 三线共点

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin\angle PBJ}{\sin\angle JBQ}\cdot\dfrac{AB}{CB}\cdot\dfrac{\sin\angle QPC}{\sin\angle PQA}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin\angle CBN}{\sin\angle NBD}\cdot\dfrac{\sin\angle DBM}{\sin\angle MBA}=\dfrac{CB}{AB}$.

上式左边分母、分子同时乘以 $\dfrac{1}{4}BA\cdot BM\cdot BD\cdot BN\cdot BC$ 得

$\dfrac{S_{\triangle MBD}S_{\triangle NCB}\cdot AB}{S_{\triangle ABM}S_{\triangle BDN}\cdot BC}=\dfrac{MD\cdot NC\cdot AB}{AM\cdot DN\cdot BC}$

$=\dfrac{CH\cdot AB}{AH\cdot BC}=\dfrac{CB}{AB}$.

因此,结论得证.

15. (1)对于边或对角线 $P_iP_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$,称其高为 $\min\{j-i,n-(j-i)\}$. 若 P_iP_j 满足点 Q_i 与 P_j 重合或点 Q_j 与 P_i 重合,则称 P_iP_j 是“好的”.

若存在凸的劲敌多边形 $P_1P_2\cdots P_n$,取高最小的好的边或对角线 P_iP_j,不妨设其高为 $j-i$,再不妨设点 Q_i 与 P_j 重合.

若 $j=i+1$,矛盾.

考虑点 Q_{i+1},若它与 $P_k(i\leqslant k\leqslant j)$ 重合,则 $P_{i+1}Q_{i+1}$ 也是好的且高比 P_iP_j 更小,矛盾.

于是,必然有 $P_{i+1}Q_{i+1}$ 与 P_iQ_i 在形内相交. 这可以由几何性质推出

$P_iQ_i+P_{i+1}Q_{i+1}>P_iQ_{i+1}+P_{i+1}Q_i$.

但由题意,知 $P_iQ_i<P_iQ_{i+1}$.

故 $P_{i+1}Q_{i+1}>P_{i+1}Q_i$,矛盾.

因此,不存在凸的劲敌多边形.

(2) $n\geqslant 4$ 时均可找到劲敌多边形. 构造如图5.

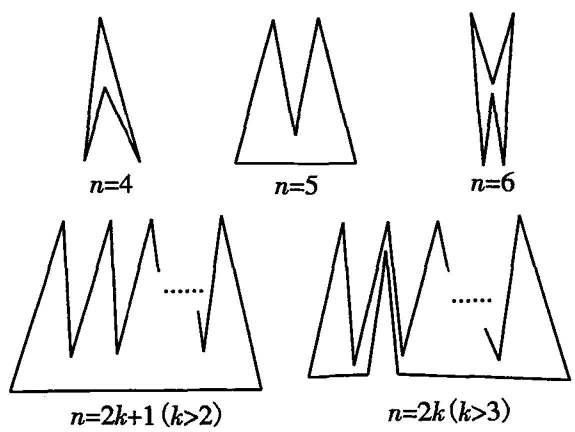

图5

16. 设 $\dfrac{ab}{a+b}=d$. 则 $(a-d)(b-d)=d^2$.

设 $g(n)$ 为正整数 n 的正约数的个数. 则 $g(d^2)$ 即为此时 (a,b) 解的个数.

于是,$f(N)=\sum\limits_{d\mid n}g(d^2)$.

下面证明：对于任意的正整数 n，均有

$f(n)=g^2(n)$.

对 n 的素因子个数进行数学归纳.

当 $n=1$ 时，结论显然成立.

当 $n=p^\alpha$ 时，

$$\sum_{d|n} g(d^2)=1+3+\cdots+(2\alpha+1)$$
$$=(\alpha+1)^2=g^2(n),$$

结论成立.

设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时，有

$$\sum_{d|n} g(d^2)=g^2(n).$$

当 $n'=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ 时，记

$$S=\sum_{d|n} g(d^2)=g^2(n).$$

则 $\sum_{d|n'} g(d^2)$

$$=(1+(2+1)+\cdots+(2\alpha_{k+1}+1))S$$
$$=(\alpha_{k+1}+1)^2S=g^2(n').$$

从而，结论得证.

故 $f(N)=g^2(N)$，即 $f(N)$ 为完全平方数.

17. 据二次剩余的欧拉判别法，只需取 a，使 a 不是 p 的二次剩余，而 $a+c$ 是 p 的二次剩余即可.

于是，即证存在 p 的二次剩余 x，使 x^2-c 不是二次剩余.

反之，假设不存在这样的 x，则

$$\sum_{x=1}^{p}\left(\frac{x^2-c}{p}\right)=p.$$

但 $\sum_{x=1}^{p}\left(\frac{x^2-c}{p}\right)\equiv\sum_{x=1}^{p}(x^2-c)^{\frac{p-1}{2}}\equiv1\pmod p$，

矛盾.

因此，必有 a 满足题目要求.

18. 反证法.

假设 b^2+b+1、c^2+c+1 均为素数，不妨设 $b\geqslant c$，令 $p=b^2+b+1$. 则 p 整除

$$(a^2+a+1)-(b^2+b+1)$$
$$=(a-b)(a+b+1).$$

因为 p 是素数，所以，

$p\mid(a-b)$ 或 $p\mid(a+b+1)$.

(1) 若 $a-b=p$，则

$$a=b+p=b^2+2b+1=(b+1)^2,$$

矛盾.

(2) 若 $a+b+1=p$，则

$$a=p-b-1=b^2,$$

矛盾.

(3) 若 $a+b+1\geqslant2p$ 或 $a-b\geqslant2p$，即

$a\geqslant2b^2+b+1$ 或 $a\geqslant2b^2+3b+2$，

则 $a\geqslant2b^2+b+1$.

因为 $b\geqslant c$，所以，由条件等式知

$$(2b^2+b+1)^2+(2b^2+b+1)+1$$
$$\leqslant3(b^2+b+1)^2$$
$$\Rightarrow b(b-3)(b^2+b+1)\leqslant0$$
$$\Rightarrow b\leqslant3.$$

当 $b=c=1$ 时，$a^2+a+1=27$，无正奇数解，矛盾；

当 $b=3$ 时，$c=1$ 或 $c=3$，$a^2+a+1=117$ 或 $a^2+a+1=507$，均无正奇数解，矛盾.

综上，b^2+b+1、c^2+c+1 中至少有一个是合数.

19. 设 $x=2^mn$（n 为正奇数，$m\in\mathbf{N}$）.

记 $v_p(a)$ 表示整数 a 的素因数分解中 p 的次数.

由 $7^n-1\equiv6\pmod8$，知存在 $p\equiv3\pmod4$，$v_p(7^n-1)=a$ 为奇数.

又 $v_p(7^x-1)=v_p(7^n-1)+v_p(2^m)=a$，

且由二次剩余基本结论知

$$y^2+z^2\equiv0\pmod p\Rightarrow p\mid y, p\mid z.$$

但 $v_p(7^x-1)$ 为奇数，矛盾.

因此，所求方程无解.

20. 注意到，

$$3\mid(P(x+3)-P(x))\ (x\in\mathbf{Z}).$$

若 $x\equiv0\pmod3$，则

$$x^2\equiv P(P(x))\equiv P(P(-3))=P(-40)$$
$$\equiv P(-1)=-4\equiv-1\pmod3,$$

矛盾.

若 $x\equiv1\pmod3$，则

$$x^2\equiv P(P(x))\equiv P(P(-5))=P(-156)$$
$$\equiv P(-3)=-40\equiv-1\pmod3,$$

矛盾.

若 $x\equiv2\pmod3$，则

$$x^2\equiv P(P(x))\equiv P(P(-1))=P(-4)$$
$$\equiv P(-1)=-4\equiv-1\pmod3,$$

矛盾.

故满足 $P(P(x))=x^2$ 的 x 的个数为 0.

（李安琪　陈昱达　周梓锋　解答）