2020 越南数学奥林匹克试题与解析

甘润知[1] 马飞雁[1] 陈昱达[2] 陈奕宸[3]

(1. 华东师范大学第二附属中学, 201203; 2. 天津市第四中学, 300210;

3. 天津市南开中学, 300100)

指导教师: 杨丕业 (北京质心教育科技有限公司)

2020 越南数学奥林匹克 (VMO) 于 2019 年 12 月 27 日和 28 日举行. 本次竞赛由 7 道题目组成, 分两天举行. 第一天考试有 4 道题, 每题 5 分, 第二天考试有 3 个题, 分值分别为 6 分, 6 分, 7 分. 满分 40 分.

下面我们给出试题的解答与评析, 解答人姓名随解答给出. 我们还在 AoPS 论坛上选取了第 4,5,6 题的优质解答[1], 翻译后一并刊登于本文.

同时感谢来自北京质心教育科技有限公司的杨丕业老师, 对试题进行了翻译[2], 并在我们撰写解答时提供宝贵的建议.

I. 试 题

1. 数列 x_n 定义为 $x_1=1$, 且对任意 $n\geq 1$ 都有 $x_{n+1}=x_n+3\sqrt{x_n}+\frac{n}{\sqrt{x_n}}$.

(1) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{x_n}=0$;

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{x_n}$.

2. (1) 三个实数 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2=1$, 证明:

$$|a-b|+|b-c|+|c-a|\leq 2\sqrt{2};$$

(2) 2019 个实数 $a_1,a_2,\ldots,a_{2019}$ 满足 $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{2019}^2=1$. 求表达式

$$S=|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_{2018}-a_{2019}|+|a_{2019}-a_1|.$$

的最大值.

3. 数列 a_n 定义为 $a_1=5$, $a_2=13$, 且对任意 $n\geq 2$ 都有 $a_{n+1}=5a_n-6a_{n-1}$.

(1) 证明: 该数列任意两个相邻的项都互素;

修订日期: 2020-02-29.

(2) 证明: 对任意自然数 k, 若 p 是 a_{2^k} 的一个素因子, 则 $p-1$ 可被 2^{k+1} 整除.

4. 不等腰的锐角 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, H 是其垂心, D,E,F 分别是 O 关于三边 BC,CA,AB 的对称点.

(1) 设 H_a 是 H 关于 BC 的对称点, A' 是 A 关于 O 的对称点, O_a 是 $\triangle BOC$ 的外心. 证明: H_aD 和 O_aA' 的交点在 $\odot O$ 上;

(2) 取点 X 满足 $AXDA'$ 是一个平行四边形. 证明: $\triangle AHX$, $\triangle ABF$ 和 $\triangle ACE$ 的外接圆有除 A 外的公共点.

5. 以 a 为参数的方程组:

$$\begin{cases} x-ay=yz \\ y-az=zx \\ z-ax=xy \end{cases} \quad (x,y,z\in\mathbb{R}).$$

(1) 当 $a=0$ 时, 解这个方程组;

(2) 证明: 当 $a>1$ 时该方程组有 5 组解.

6. 给定不等腰的锐角 $\triangle ABC$, 记 D,E,F 分别为 A,B,C 向对边所引高线的垂足. 以 AD 为直径的圆交 DE,DF 于点 M,N. 在 AB,AC 上取点 P,Q 满足 $NP\perp AB$, $MQ\perp AC$. 最后, 记 $\odot I$ 为 $\triangle APQ$ 的外接圆.

(1) 证明: $\odot I$ 与 EF 相切;

(2) 设 T 为 $\odot I$ 在 EF 上的切点, DT 与 MN 交于点 K, L 是 A 关于 MN 的对称点. 证明: $\triangle DKL$ 的外接圆过 EF 与 MN 的交点.

7. 给定正整数 $n>1$, T 是所有有序组 (x,y,z) 组成的集合, 其中正整数 x,y,z 互不相同, 且 $1\le x,y,z\le 2n$. 集合 A 由一些有序对 (u,v) 组成, 若对任意 T 中的元素 (x,y,z) 都有 $\{(x,y),(x,z),(y,z)\}\cap A\neq\varnothing$, 我们称 A 与 T 相连.

(1) 求 T 中的元素个数;

(2) 证明: 存在一个与 T 相连的集合, 且其恰有 $2n(n-1)$ 个元素;

(3) 证明: 任意与 T 相连的集合的元素个数都不少于 $2n(n-1)$.

II. 解答与评注

1. 数列 x_n 定义为 $x_1=1$, 且对任意 $n\geq 1$ 都有 $x_{n+1}=x_n+3\sqrt{x_n}+\frac{n}{\sqrt{x_n}}$.

(1) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{x_n}=0$;

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{x_n}$.

证明 (甘润知) (1) 我们证明 $x_n\geq n^2$.

注意到 $x_1=1,x_2=5$, 可以设当 $x_{n-1}\geq(n-1)^2$, 考虑 n 的情况, 那么

$$x_n=x_{n-1}+3\sqrt{x_n}+\frac{n}{\sqrt{x_n}}\geq(n-1)^2+3(n-1)\geq n^2.$$

那么在 $n\to\infty$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n}=0.$$

(2) 我们的证明分两步:

(i) 证明: $x_n<\frac{9}{4}n^2+100n.$ $\quad(*)$

使用归纳假设, 显然此式对 $n=1,2$ 时是成立的, 设 $(*)$ 在 $n-1$ 时成立, 考虑 n 时, 此时

$$\begin{aligned}x_n&=x_{n-1}+3\sqrt{x_n}+\frac{n}{\sqrt{x_n}}\\&<\frac{9}{4}(n-1)^2+100n-100+3(\frac{3}{2}(n-1)+30)+1\\&<\frac{9}{4}n^2+100n.\end{aligned}$$

(ii) 证明: $x_n>\frac{9}{4}n^2-100n.$ $\quad(**)$

使用归纳假设, 显然此式对 $n=1,2$ 是成立的, 设 $(**)$ 在 $n-1$ 时成立, 考虑 n 时, 此时

$$\begin{aligned}x_n&=x_{n-1}+3\sqrt{x_n}+\frac{n}{\sqrt{x_n}}\\&>\frac{9}{4}(n-1)^2-100n+100+3(\frac{3}{2}(n-1)-30)+\frac{4}{9}\\&>\frac{9}{4}n^2-100n.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{x_n}=\frac{4}{9}.$$

□

评注 十分基本的一个题, 很适合放在一试的第 9 题, 放在越南数学奥林匹克似乎有一些偏简单了. 第一问可以根据第二问的问题或者自己尝试写几个数猜出答案是 0, 第二问的话笔者用了待定系数法: 先假设 $x_n\sim kn^2$ $(n\to+\infty)$,

然后代入递推公式比较 n 前的系数, 这样可以得到 k 的值. 在写过程的时候要注意一个比较容易扣分的地方: 第二问别忘了要求上下界, 一部分学生可能就求完上界就开始写过程了, 这就可能会被扣掉第二问一半的分数了.

2. (1) 三个实数 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2=1$, 证明:

$$|a-b|+|b-c|+|c-a|\le 2\sqrt{2};$$

(2) 2019 个实数 $a_1,a_2,\ldots,a_{2019}$ 满足 $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{2019}^2=1$. 求表达式

$$S=|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_{2018}-a_{2019}|+|a_{2019}-a_1|$$

的最大值.

证明 (甘润知) (1) 设 $a\ge b\ge c$, 则

$$|a-b|+|b-c|+|c-a|\le 2|a|+2|c|\le 2\sqrt{2a^2+2c^2}\le 2\sqrt{2}.$$

(2) 由于

$$\prod_{i=1}^{2019}(a_i-a_{i+1})(a_{i+1}-a_{i+2})\ge 0,$$

所以存在 $1\le k\le 2019$, 使 $(a_k-a_{k+1})(a_{k+1}-a_{k+2})\ge 0$. 即

$$|a_k-a_{k+1}|+|a_{k+1}-a_{k+2}|=|a_k-a_{k+2}|.$$

故原式左侧

$$\begin{aligned}S&=|a_1-a_2|+\cdots+|a_{k-1}-a_k|+|a_k-a_{k+2}|+|a_{k+2}-a_{k+3}|+\cdots+|a_{2019}-a_1|\\&\le 2|a_1|+2|a_2|+\cdots+2|a_k|+2|a_{k+2}|+\cdots+2|a_{2019}|\\&\le 2\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2019}^2)\cdot 2018}\\&\le 2\sqrt{2018}.\end{aligned}$$

取等条件:

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{2018}},a_2=-\frac{1}{\sqrt{2018}},a_3=\frac{1}{\sqrt{2018}},\cdots,a_{2018}=-\frac{1}{\sqrt{2018}},a_{2019}=0.\quad\square$$

评注 比较容易的一个不等式问题, 适合放在一试的第 10 题位置, 放在越南数学奥林匹克的第二题偏简单. 第一问因为式子轮换对称, 所以就可以设 $a\ge b\ge c$, 柯西或者均值不等式随便一做就做完了. 第二问在尝试 $|a_1-a_2|+|a_2-a_1|,|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_4|+|a_4-a_1|$ 的最大值的时候可以推出原式的最大值是 $2\sqrt{2018}$, 注意到 2019 是一个奇数, 因此可以联想到一个常用结论: 对任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2k+1}$ $(k\ge 1)$ 排成一圈, 可以找到连续三个

数满足这三个数从小到大或者从大到小排列. 想到这个结论, 这道题便迎刃而解. 书写时注意上下标, 不要把上下标弄混以至于一些不必要的扣分.

3. 数列 a_n 定义为 $a_1=5, a_2=13$, 且对任意 $n\geq 2$ 都有 $a_{n+1}=5a_n-6a_{n-1}$.

(1) 证明: 该数列任意两个相邻的项都互素;

(2) 证明: 对任意自然数 k, 若 p 是 a_{2^k} 的一个素因子, 则 $p-1$ 可被 2^{k+1} 整除.

证明 (甘润知) (1) 由特征根方程可得 $a_n=2^n+3^n$. 由辗转相除法可得

$$(2^n+3^n,2^{n+1}+3^{n+1})=(2^n+3^n,3^n)=(2^n,3^n)=1.$$

(2) 设素因子 $p\mid 2^{2^k}+3^{2^k}$. 由 (2,3)=1, 存在一个整数 x 使得

$$2x\equiv 3 \pmod p), (x,p)=1.$$

则由 $p\mid (2x)^{2^k}+(3x)^{2^k}$, 那么 $p\mid x^{2^k}+1$.

设 p 模 x^{2^k} 的阶为 δ, 则 $\delta\mid (p-1,2^{k+1})$.

若 $(p-1)$ 中的 2 次幂小于 $k+1$ 次, 即 $v_2(\delta)\leq k$. 则

$$-1\equiv x^{2^k}\equiv (x^\delta)^{\frac{2^k}{\delta}}\equiv 1 \pmod p).$$

即 $p=2$, 矛盾!

故对每个素数 $p\mid 2^{2^k}+3^{2^k}$ 都有 $(p-1)$ 是 2 的 $k+1$ 次幂. □

评注 这个题放在越南数学奥林匹克第三题偏简单, 应当是我国联赛二试的第一题难度 (可能都没有). 还是一个比较初级的考察"阶"的应用的考题. 第一问属于送分, 第二问的话结论既可以弱化又可以推广如下:

弱化的结论: 对素数 $p>2$, 若

$$p\mid 2^{2^k}+1,$$

那么 $2^{k+1}\mid p-1$.

强化的结论: 对素数 $p>2$, 若

$$p\mid x^{2^k}+y^{2^k},$$

那么 $2^{k+1}\mid p-1$. 其中 $\gcd(x,y)=1$.

有兴趣的读者可以尝试:

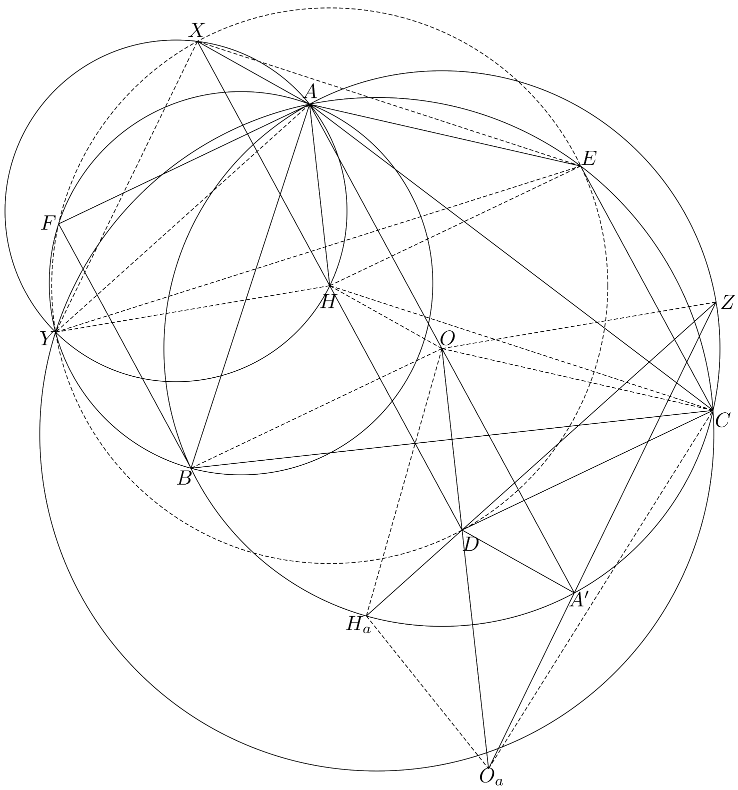
弱化的结论的强化结论: 对素数 $p>2$, 整数 $k\geq 2$, 若 $p\mid 2^{2^k}+1$, 那么 $2^{k+2}\mid p-1$.

事实上, 能够联想到弱化结论, 题目也就做完了.

4. 不等腰的锐角 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, H 是其垂心, D,E,F 分别是 O 关于三边 BC,CA,AB 的对称点.

(1) 设 H_a 是 H 关于 BC 的对称点, A' 是 A 关于 O 的对称点, O_a 是 $\triangle BOC$ 的外心. 证明: H_aD 和 O_aA' 的交点在 $\odot O$ 上;

(2) 取点 X 满足 $AXDA'$ 是一个平行四边形. 证明: $\triangle AHX$, $\triangle ABF$ 和 $\triangle ACE$ 的外接圆有除 A 外的公共点.



解法一 (甘润知、陈昱达)

(1) 设 H_aD 交 $\odot O$ 于Z. 只需证明 Z,A',O_a 三点共线即可, 即需证 $\angle H_aZA'=\angle H_aZO_a$.

由 $\angle OO_aC=2\angle OBC=\angle OCD$ 可知 $\triangle OCD\sim\triangle CO_aO$, 则

$$OC^2=OD\cdot OO_a=OH_a^2=OZ^2.$$

可知

$$\angle ZO_aO=\angle OZH_a=\angle OH_aZ=\angle OO_aH_a,$$

故 Z,O,H_a,O_a 四点共圆. 又 $\angle A'OO_a=\angle H_aOO_a$ 可得

$$\angle H_aZA'=\frac{1}{2}\angle HOA'=\angle A'OO_a=\angle H_aOO_a=\angle H_aZO_a.$$

(2) 根据题目条件以及相关外心和垂心中角的性质可得

$$\angle AEC = \angle AOC = 2\angle ABC = 2(\pi - \angle AHC).$$

又因为 $EA = EC$, 因此 $EH = EA = EC$, 进而得到

$$OA = OC = AE = EC = EH = HX.$$

因此以 H为圆心, HE为半径作一个过 X 的圆, 设这个圆还交 $\triangle AHX$ 的外接圆于 Y. 接下来证明 Y 就是我们所要求的那个点.

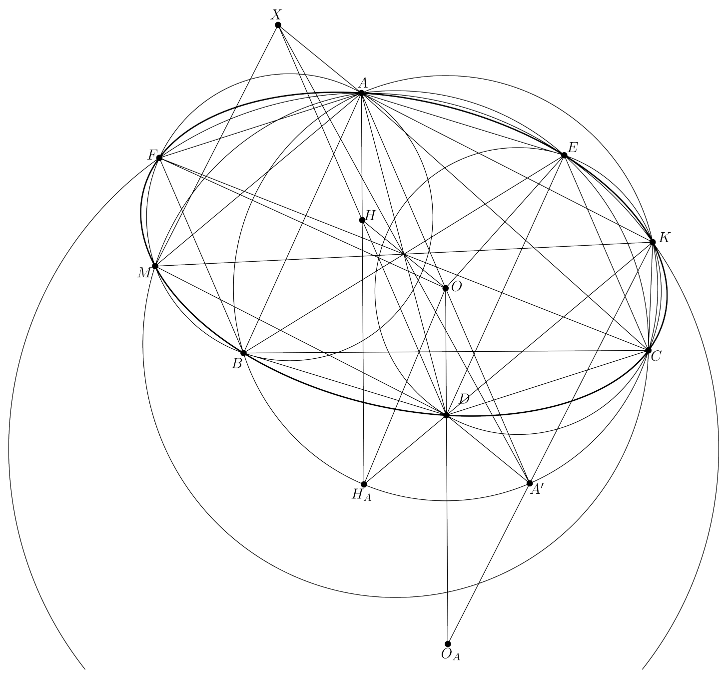
注意到 $EC \parallel AO, EC = AO, EC = HX$, $AOHX$ 是平行四边形, 因此 $CHXE$ 也是平行四边形, 因此

$$\angle CHO = \angle EXA.$$

由 $HX = HY = HE$, A, H, X, Y 四点共圆以及垂心的角的性质进一步得到

$$\begin{aligned}\angle AYE &= \angle AYH - \angle HYE = \angle HXA - \angle HEY \\ &= \angle HXE - \angle AXE - \angle HEY = \angle XEY - \angle CHO \\ &= \frac{\pi}{2} - \angle XYH - (\angle AHO - \angle AHC) = \frac{\pi}{2} - \angle ABC \\ &= \angle HAB = \angle OAC = \angle ECA.\end{aligned}$$

因此 Y, A, C, E 四点共圆, 类似地, Y, A, B, F 四点共圆, 因此命题获证. □



解法二 (AoPS) (1) 略.

(2) 首先注意到 $XAA'D$, $XAOH$, $HOA'D$ 均为平行四边形. 因此

$$\angle XHA=\angle HAO=\angle DOA'=\angle DKA'.$$

设 $\odot(ABF)\cap\odot(ACE)=M$. 下证 M 与 K 关于 $\triangle ABC$ 的 N_9 (译者注: N_9 为九点圆圆心) 对称. ($K=H_AD\cap O_AA'$).

由广义 Reim 定理的逆定理 (译者注: 广义 Reim 定理及其逆定理与证明见评析) 可知, 如果 $\mathcal{C}$ 是一个经过 A,F,B,D,C,E 的圆锥曲线, 则

$$BF\parallel CE\implies M\in\mathcal{C}.$$

又注意到 $K\in H_AD$, 因此

$$\angle DKC=90^\circ-\angle C=\angle DEC\implies D,E,K,C$$

共圆. 注意到由于 D 与 E 关于 CH 对称, 故

$$\angle DEC=90^\circ-\angle C.$$

同理可证 A,F,E,K 共圆.

又由于广义 Reim 定理的逆定理, 有 $K\in\mathcal{C}$. 故

$$\angle BMA=\angle EKD.$$

又由于对称性, 故有 M 与 K 关于 N_9 对称. 再注意到

$$\angle XHA=\angle DKA'=\angle XMA.$$

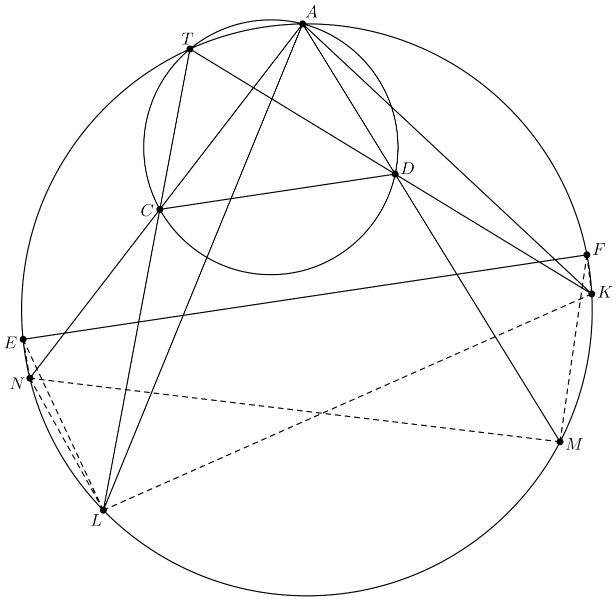
因此, $\odot(AHX)$ 经过 M . □

评注 有一点我国联赛二试的味道了 (放在越南数学奥林匹克第一天的压轴题还算比较合适), 笔者此题想了 1 个小时, 本题第一问是一个比较“陈”的结论了, 通过一些相似, 导角的常用手法可以轻松搞定. 第二问有一些困难, 我看到的一些解答有的是写了用调和, 有的是用向量法, 但这些解答的辅助线实在是让人看得眼花缭乱, 此处笔者采用了一个比较巧妙的手法: 注意到这个共的点事实上在一个以垂心为圆心, 外接圆长为半径的一个圆上! 这个是需要一定的时间发现的, 如果发现这个结论, 那么这个题也就可以通过我们比较熟悉的导角做完了. 我认为单单展现此题的第二问, 虽然解答很短, 但是也在某一程度上达到了二试第 3 题的难度了.

附:

广义 Reim 定理 设 $\mathcal{C}$ 是一个过 A,B 的圆锥曲线. 若过 A,B 的圆 ω_1 和圆 ω_2 与 $\mathcal{C}$ 分别再次交于 C,D 和 E,F. 则 $CD\parallel EF$.

证明 设 I, J 为复射影平面上两点, 齐次坐标分别为 $(1:i:0)$ 和 $(1:-i:0)$. 考虑将 A, B 分别变成 I, J 的射影变换. 对每个点 P, 用 P' 表示射影变换后的点. 则 $\mathcal{C}', \omega_1', \omega_2'$ 均为圆. 此外, 由于 ω_1, ω_2 交于 A, B, I, J, 可以得到 ω_1', ω_2' 的另外两个交点为 I', J'. 由根心定理, $C'D', E'F', I'J'$ 三线共点. 再做一次反向的射影变换, 就证明了这个定理. ■



广义 Reim 定理的逆定理 设 $\mathcal{C}$ 为一圆锥曲线, $A \in \mathcal{C}$. 设 $C, D, E, F \in \mathcal{C}$, 使得 $CD \parallel EF$. 则 $\odot(ACD) \cap \odot(AEF) \in \mathcal{C}$.

证明 设 $T = \odot AEF \cap \odot ACD$. 这可以说明

$$(TC, TD, TE, TF) = (AC, AD, AE, AF),$$

故 $T \in \mathcal{C}$.

设

$$M = AD \cap \odot AEF,$$

$$N = AC \cap \odot AEF,$$

$$K = TC \cap \odot AEF,$$

$$L = TD \cap \odot AEF.$$

由 Reim 定理 (译者注: 即广义 Reim 定理中, 圆锥曲线是圆的情况) 可得

$$NL \parallel CD \parallel EF \parallel KM.$$

因此有 $NMEF$ 和 $LKFE$ 关于 EF 的垂直平分线对称. 特别地,有 $[N, M; E, F] =$

$[K, L; E, F]$. 因此由交比的性质有

$$[AC, AD; AE, AF] = [N, M; E, F] = [K, L; E, F] = [TC, TD; TE, TF].$$

所以可以得出结论 $T \in \mathcal{C}$. ■

5. 以 a 为参数的方程组:

$$\begin{cases} x - ay = yz \\ y - az = zx \\ z - ax = xy \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

(1) 当 $a = 0$ 时, 解这个方程组;

(2) 证明: 当 $a > 1$ 时该方程组有 5 组解.

解法一 (陈昱达)

(1) 当 $x = y = z$ 时, 可得到第一组和第二组解:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0),\ (1, 1, 1).$$

下面考虑 x, y, z 不全相等的情况. 消元可得 $y = x^2 y$, 即 $(1 - x^2)y = 0$, 显然 $y \neq 0$, 则 $x = \pm 1$. 同理 $y = \pm 1, z = \pm 1$. 由原式的正负性可知 x, y, z 必全为正数或两负一正, 则至多有以下三组解:

$$(x, y, z) = (1, -1, -1),\ (-1, 1, -1),\ (-1, -1, 1).$$

经检验, 以上三组解均成立.

综上, 当 $a = 0$ 时, 该方程组共有 5 组解:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0),\ (1, 1, 1),\ (1, -1, -1),\ (-1, 1, -1),\ (-1, -1, 1).$$

(2) 首先可以求得两组解:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0),\ (1 - a, 1 - a, 1 - a).$$

下面考虑 x, y, z 不全相等的情况. 将原式消元可得

$$\begin{cases} x - ay = y(ax + xy) \\ y - a(ax + xy) = (ax + xy)x \end{cases},$$

得到

$$y = \frac{a^2 x + a x^2}{1 + ax - x^2}.$$

再次消元可得

$$x - \frac{a^3 x}{1 - ax - x^2} - \frac{a^2 x^2}{1 - ax - x^2} - \frac{a^3 x^2 + a^2 x^3}{(1 - ax - x^2)^2} = 0.$$

再将此式除去 0 和 $1-a$ 的根 (即除以 $x(x-1+a)$), 整理可得

$$x^3+(a^2+a+1)x^2+(a^3-1)x-a^2-a-1=0.$$

将 $f(x)=x^3+(a^2+a+1)x^2+(a^3-1)x-a^2-a-1$ 求导可得

$$f'(x)=3x^2+2(a^2+a+1)x+a^3-1.$$

由

$$\Delta_{f'(x)}=4(a^4-a^3+3a^2+2a+4)>4(3a^2+2a+4)>0(a>1),$$

$$\Delta_{f'(x)}<4(a^2+a+1)^2,$$

可知 $f(x)$ 有两个极值点 x_{f1},x_{f2}:

$$x_{f1}=-\frac{(\sqrt{a^4-a^3+3a^2+2a+4}+a^2+a+1)}{3},$$
$$x_{f2}=\frac{(\sqrt{a^4-a^3+3a^2+2a+4}-a^2-a-1)}{3}.$$

由

$$f(x_{f1})=x_{f1}^3+(a^2+a+1)x_{f1}^2+(a^3-1)x_{f1}-a^2-a-1>0$$

和

$$f(x_{f2})=x_{f2}^3+(a^2+a+1)x_{f2}^2+(a^3-1)x_{f2}-a^2-a-1<0$$

可知该三次方程有三个不等实根 x_1,x_2,x_3.

下证明 x,y,z 必两两不等.

若 $x=y\neq z$, 则由原式得

$$x=(a+z)x\Rightarrow a+z=1\Rightarrow z=1-a.$$

此时 $x=y=z=1-a$, 与假设矛盾. 故 x,y,z 两两不等. 由 x,y,z 轮换且两两不等可知, 该方程组还有三组解:

$$(x,y,z)=(x_1,x_2,x_3),\ (x_2,x_3,x_1),\ (x_3,x_1,x_2).$$

综上, 当 $a>1$ 时该方程组共有 5 组解:

$$(x,y,z)=(0,0,0),\ (1-a,1-a,1-a),\ (x_1,x_2,x_3),\ (x_2,x_3,x_1),\ (x_3,x_1,x_2).\ \square$$

解法二 (AoPS) (1) 当 $a=0$ 时, 将三个方程相乘, 得到 $xyz(xyz-1)=0$. 假设 $xyz=0$, 那么 $x=0$, 故 $yz=0,y=0$. 代入到第三个方程得到 $z=0$. 如果 $xyz-1=0$, 则分别用 $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ 来代换 yz,zx,xy. 得到 $x=y=z=\pm1$ (译者注: 即 $(x,y,z)=(1,1,1)$ 或 $(1,-1,-1)$ 或 $(-1,1,-1)$ 或 $(-1,-1,1)$).

(2) 如果 $z=0$, 则 $x=y=0$.

如果 $z\neq 0$, 则

$$x=ay+yz, y-az=z, ay+yz, z-a=ay+yz.$$

故

$$x=ay+yz, y=\frac{az}{1-az-z^2}z-(ay+yz)=y(ay+yz).$$

由第二和第三个方程可以得到

$$z-a^2+az\cdot\frac{az}{1-az-z^2}=a+z\left(\frac{az}{1-az-z^2}\right)^2.$$

即

$$z^5+a^2+2az^4+2a^3-2z^3+a^4-a^3-a^2-2az^2+1-a^3z=0.$$

下证该方程有 5 组解. 容易看出该方程的两组解,即 0 和 $1-a$. 原方程化为

$$(z)(z-1+a)(z^3+(a^2+a+1)z^2+(a^3-1)z-a^2-a-1)=0.$$

设 $f(z)=z^3+(a^2+a+1)z^2+(a^3-1)z-a^2-a-1$, 由

$$f(-\infty)<0, f(-2a)>0, f(0)<0, f(+\infty)>0,$$

可知该方程还有三组解, 故方程组共有五组解. □

评注 本题难度上来说作为第二天的第一题还是比较合适的, 难度大约在二试第 1 题和第 2 题之间. 本题从方法上来说着实不太难, 核心就在于算. 看出 0 和 $1-a$ 的根后, 原题就化为了一个证明该三次方程有三个实根的问题 (此处也可以使用三次方程的实根判别式). 笔者认为 AoPS 上的解答构造的四个函数值比较巧妙, 比笔者的解答更为简洁. 此外, 还要注意在由方程组化为一元五次方程的时候一定要仔细, 稍不注意便有可能计算出错, 功亏一篑.

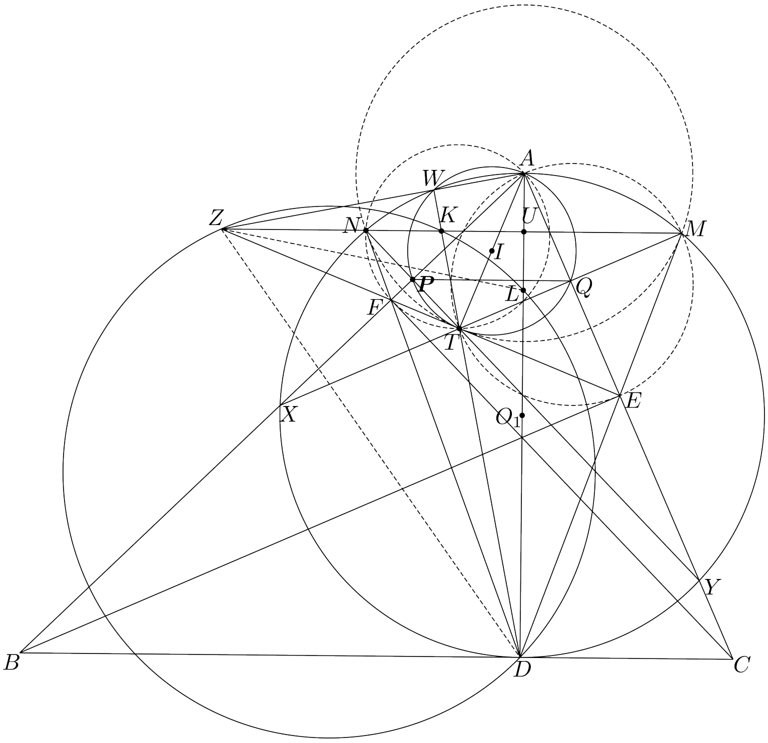
6. 给定不等腰的锐角 $\triangle ABC$, 记 D,E,F 分别为 A,B,C 向对边所引高线的垂足. 以 AD 为直径的圆交 DE,DF 于点 M,N. 在 AB,AC 上取点 P,Q 满足 $NP\perp AB$, $MQ\perp AC$. 最后, 记 $\odot I$ 为 $\triangle APQ$ 的外接圆.

(1) 证明: $\odot I$ 与 EF 相切;

(2) 设 T 为 $\odot I$ 在 EF 上的切点, DT 与 MN 交于点 K, L 是 A 关于 MN 的对称点. 证明: $\triangle DKL$ 的外接圆过 EF 与 MN 的交点.

解法一 (马飞雁、陈奕宸)

(1) 过 A 作 $AT\perp EF$ 于 T. 显然有 A,F,N,T 与 A,E,M,T 两组四点共



圆. 由于

$$\angle FNT = \angle FAT = 90^\circ - \angle ACB,$$

$$\angle FNP = 90^\circ - \angle NFP = 90^\circ - \angle BPD = 90^\circ - \angle ACB.$$

故 N, P, T 共线. 同理 M, Q, T 共线, 则 $\angle APT = \angle AQT = 90^\circ$, 故 A, P, Q, T 四点共圆且 AT 为直径.

又 $AT \perp EF$, 故 $\odot I$ 与 EF 相切.

(2) 记以 AD 为直径的圆为 $\odot O_1$, 记 $\odot O_1$ 和 AC 交于 Y, 和 AB 交于 X. 故

$$\angle FNT = \angle FAT = \angle FTN = \angle DAC = \angle DAY.$$

则 N, T, Y 三点共线, 同理 M, T, X 共线. 由于 $\angle FTN = \angle DAC = \angle NMT$, 故 FT 为 $\triangle MNT$ 外接圆的一条切线.

记 MN, EF 交于点 Z, 取 W 为 DT 和 $\triangle APQ$ 外接圆的交点.

由于 AT 为 $\triangle APQ$ 外接圆的直径, 故 $\angle AWT = \angle AWD = 90^\circ$, 则 W 在 $\odot O_1$ 上.

由根心定理得 $\odot O_1$, $\triangle APQ$ 外接圆, $\triangle MNT$ 外接圆两两的根轴 AW, ZT, MN 交于一点, 即为 Z. 故 Z, W, A 共线, 则

$$\angle LZK = \angle AZK = 90^\circ - \angle WKZ = \angle KDL.$$

故 K, L, D, Z 共圆, 即 $\triangle DKL$ 外接圆过 EF, MN 的交点. □

解法二 (AoPS) (1) 略.

(2) 设 U 为 MN 的中点, Z 为 EF 与 MN 的交点.

由于 $[M,N;K,Z]=[E,F;T,Z]=-1$, 又因为 U 是 MN 的中点, 结合调和点列的性质, 则有:

$$\overrightarrow{UK}\cdot\overrightarrow{UZ}=UN^2=UM^2=-\overrightarrow{UA}\cdot\overrightarrow{UD}=\overrightarrow{UL}\cdot\overrightarrow{UD}.$$

即 D, L, K, Z 四点共圆. □

评注 这道几何题是一道中等难度的题, 或许将此题与第 4 题交换位置更为合适. 第一问证明相切, 一个不错的方法就是先找到切点, 再证明这一条直线垂直于经过该点的半径. 第二问难度稍高, 要求证明共圆的点较难刻画, 如果从纯几何的角度分析, 但若找到本题隐藏的圆, 想到根心定理, 找到本题的关键点 W 点, 再加上一些角度的推导, 问题就迎刃而解了. 当然, 利用射影几何的观点, 也能洞察到此题的本质. 事实上, 虽然这道题构图复杂, 但是模型较为常见, 解题方法也较为常规. 本题还有一些很多有意思的结论, 譬如, L 点 $\triangle DMN$ 的垂心, MN 与 AC 的交点在过 $ANFT$ 的圆上等等, 证明也不困难, 在此不做赘述.

7. 给定正整数 $n>1$, T 是所有有序组 (x,y,z) 组成的集合, 其中正整数 x,y,z 互不相同, 且 $1\le x,y,z\le 2n$. 集合 A 由一些有序对 (u,v) 组成, 若对任意 T 中的元素 (x,y,z) 都有 $\{(x,y),(x,z),(y,z)\}\cap A\neq\varnothing$, 我们称 A 与 T 相连.

(1) 求 T 中的元素个数;

(2) 证明: 存在一个与 T 相连的集合, 且其恰有 $2n(n-1)$ 个元素;

(3) 证明: 任意与 T 相连的集合的元素个数都不少于 $2n(n-1)$.

解 (马飞雁)

(1) 可知 $|T|=2n(2n-1)(2n-2)=8n^3-12n^2+4n$.

(2) 取 $A=\{(x,y)|1\le x,y\le n \text{ 或 } n+1\le x,y\le 2n, x\neq y\}$ 即满足题意.

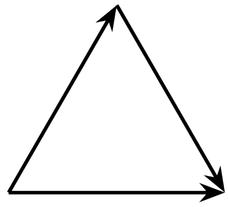
(3) 取 $S=\{(u,v)|1\le u\neq v\le 2n\}$, 则 $|S|=2n(n-1)=4n^2-2n$.

利用反证法: 设存在一个元素个数少于 $2n^2-2n$ 的 A 与 T. 则

$$|A|\le 2n^2-2n-1.$$

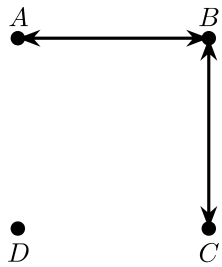
故 $|\complement_S A|\ge 2n^2+1$. 下证此时 $\complement_S A$ 必有一个三元子集 $\{(x,y),(x,z),(y,z)\}$.

命题转化为在有 $2n$ 个点 $(n\ge 2, n\in\mathbb{N}^*)$ 的有向图 K 中, 若其中有不少于 $2n^2+1$ 条有向边, 则一定存在一个如下图所示不循环的三阶完全图K_3 (我们规定给定的两点之间只能连接至多一条同一方向的边). $(*)$



K_3

当 $n=2$ 时, 4 个点之间连有不少于 9 条有向边, 必有两点间连有双向有向边. 记为 $A \to B, B \to A$. 则 A, B 两点和 C, D 两点之间连有不少于 5 条边, C, D 之中必有一个点向 A 和 B 共连出 3 条边, 不妨记为 C. 故 C 向 A, B 中一点连出两条边, 记为 $B \to C, C \to B$. 无论 CA 方向如何, A, B, C 均能组成满足要求的 K_3.



归纳假设 $n \le k$ 时, $(*)$ 成立.

当 $n=k+1$ 时, 在 $2(k+1)$ 个点的有向图中连有 $2(k^2+1)^2+1$ 条有向边, 则必有两点 (记为 a, b) 之间连有双向边, 即 $a \to b, b \to a$. 在其余 $2k$ 个点之间若连有不少于 $2k^2+1$ 条有向边, 由归纳假设 $(*)$ 对 $n=k+1$ 也成立.

否则, 若这 $2k$ 个点之间连有不多于 $2k^2$ 条有向边, a, b 两点和其余 $2k$ 个点之间连有不少于 $(2(k+1)^2+1)-2-2k^2=4k+1$ 条边, 即其余 $2k$ 个点中至少有一个点 u 向 a, b 连出了 3 条边. 易知 (u, a, b) 为满足条件的K_3, $(*)$ 成立.

故 $\complement_S A$ 中必有一个三元子集 $\{(x,y),(x,z),(y,z)\}$, 即存在一个 $(x,y,z) \in T$ 使

$$\{(x,y),(x,z),(y,z)\} \cap A = \varnothing.$$

故 A 与 T 不相连, 矛盾!

则任意与 T 相连的集合元素个数不少于 $2n(n-1)$. $\square$

评注 利用反证法转化命题后容易看出, 题目中对于"相连"的描述中出现了子集族 $\{(x,y),(x,z),(y,z)\}$, 具有明显的方向性特征, 故考虑利用图论中的有向图描述和解决问题. 在讨论 $n=2$ 的情况中, 我们发现如果有一个外部点向目标

点连出 3 边即可迅速解决问题, 故在归纳证明中采用了类似的想法. 整体思路比较自然流畅.

参考文献

[1] Art of Problem Solving. 2020 Vietnam National Olympiad.[Z/OL]. https://artofproblemsolving.com/community/c1036575_2020_vietnam_national_olympiad. 2019.12.27

[2] 杨丕业. 第十一期. 2019 年越南 MO [Z/OL]. 微信公众号“伪同文算學”. 2019.12.31.