南開大學 Nankai University　　作 业 纸

系别 数学科学学院　班级＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿　

2024 现代分析基础 (张震球) 作业　　2024 年 5 月 10 日

1 第一周课程 2024.2.20;2024.2.23

题 1

设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是测度空间, $\mathcal{N}=\{B\in A:\mu(B)=0\},\overline{\mathcal{A}}=\{E\cup F:E\in\mathcal{A},F\subset B\text{而}B\in\mathcal{N}\}$. 求证:

(1) $\overline{\mathcal{A}}$ 是 $\sigma-$ 代数.

(2) 对 $E\cup F\in\overline{\mathcal{A}}$. 定义 $\overline{\mu}(E\cup F)=\mu(E)$, 则 $\overline{\mu}$ 是 $(X,\overline{\mathcal{A}})$ 上完全测度.

2 第二周课程 2024.2.27;2024.3.1

题 2

设 φ 是 $(X,\mathcal{A})$ 上符号测度, $E\in\mathcal{A}$, 求证: $|\varphi|(E)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\varphi(F_i)|,\{F_i\}\subseteq\mathcal{A}\text{是有限个互不相交的可测集且}\bigcup_{i=1}^{n}F_i\subseteq E\right\}$.

题 3

设 $(X,\mathcal{A})$ 是可测空间, μ,ν 是 $(X,\mathcal{A})$ 上测度, μ 是 $\sigma-$ 有限, ν 是非零有限测度. 若 $\nu\ll\mu$, 求证: $\exists\varepsilon>0$ 及 $A\in\mathcal{A}$ 满足 $0<\mu(A)<\infty$ 且对 $\forall B\subset A,B\in\mathcal{A}$ 有 $\varepsilon\mu(B)\le\nu(B)$.

3 第三周课程 2024.3.5;2024.3.8

题 4

设 $(X,\mathcal{A})$ 是可测空间, ω 是 X 上 $\sigma-$ 有限测度, 而 ν,μ 是 X 上有限测度, 且 $\nu\ll\mu,\mu\ll\omega$. 求证: $\nu\ll\omega$. 且 $\dfrac{d\nu}{d\omega}=\dfrac{d\nu}{d\mu}\cdot\dfrac{d\mu}{d\omega}$ 关于 ω 测度几乎处处成立.

题 5

设 $X=[0,1], \mathcal{B}$ 是包含 $[0,1]$ 中所有开集的最小的 $\sigma-$ 代数, 即 X 上的 Borel 代数, $\mu=$Lebesgue 测度, ν 是 $\mathcal{B}$ 上的计数测度. 求证:

(1) $\mu \ll \nu$, 但对任意函数 $f \in L(X, \mathcal{B}, \nu), \mathrm{d}\mu \neq f \mathrm{d}\nu$.

(2) ν 没有关于 μ 的 Lebesgue 分解.

4 第四周课程 2024.3.12;2024.3.15

题 6

设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是测度空间. 定义 $M=2^X$ 上的集值映射 $\mu^*: M \mapsto [0, \infty]$ 为

$$\text{对} \forall E \in M, \mu^*=\inf \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j), A_j \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right\}$$

求证:

(1) μ^* 是 X 上外测度.

(2) $\mu^*|_{\mathcal{A}}=\mu$. (3) 若 $E \in \mathcal{A}$, 则 E 是 μ^* 可测的.

题 7

设 μ 是可测空间 $(X, \mathcal{A})$ 上有限测度, μ^* 是由 μ 诱导出的 X 上的外测度 (见题6), 设存在 $E \subset X$, 使得 $\mu^*(E)=\mu^*(X)$, 对 $A, B \in \mathcal{A}$, 若 $A \cap E=B \cap E$. 求证: $\mu(A)=\mu(B)$.

5 第五周课程 2024.3.19;2024.3.22

题 8

设 m 是一维直线 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度. H_1 是 $\mathbb{R}$ 上的 1 维 Hausdorff 测度. 求证: $H_1=m$.

题 9

设 (X,d) 是紧的度量空间, μ 和 ν 是 (X,d) 上正则的 Borel 测度, 求证: $\mu \geq \nu$(即对于 $\forall$Borel 集 $E, \mu(E) \geq \nu(E)$)$\Longleftrightarrow$ 对 $\forall f \in C(X)$ 且 $f \geq 0$, 有 $\displaystyle\int_x f \mathrm{d}\mu \geq \int_X f \mathrm{d}\nu$.

6 第六周课程 2024.3.26;2024.3.29

题 10

设 m 是直线 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ 是测度空间, $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathcal{M}, m\times m)$ 是其乘积测度空间, 设 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x = y\}$. 求证 D 是 $\mathcal{M}-$ 可测的, 且 $(m\times m)(D) = 0$.

题 11

设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 是测度空间, μ^*, ν^* 分别是 X 和 Y 上由测度 μ 和 ν 诱导出的外测度, 设 $A \subset X, B \subset Y$ 且 $0 < \mu^*(A) < \infty, 0 < \mu^*(B) < \infty$. 求证 $A\times B$ 是 $\mu\times\nu-$ 可测充要条件是 $A \in \mathcal{A}$且$B \in \mathcal{B}$.

7 第七周课程 2024.4.2;2024.4.7

题 12

设 $(X, \mathcal{A})$ 是 $\sigma-$ 有限测度空间, 求证 $L^\infty(X, \mathrm{d}\mu)$ 是完备的.

8 第八周课程 2024.4.9;2024.4.12

题 13

设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是 $\sigma-$ 有限测度空间, $1 \leq p < \infty, f_0 \in L^p(X, \mathrm{d}\mu)$, 若对 $\forall T \in (L^p(X, \mathrm{d}\mu))^*$ 有 $T(f_0) = 0$. 求证 $f_0 = 0, \mu$ 几乎处处.

题 14

设 $X=(0,+\infty), f\in L^p(X)$, $\mathrm{d}y$ 为 Lebesgue 测度. 定义 $Tf(x)=\int_0^{+\infty}\frac{f(y)}{x+y}\mathrm{d}y$, 则对 $1<p<\infty$,

$$\|Tf\|_p \le c_p\|f\|_p$$

其中 $c_p=\int_0^{\infty}x^{-\frac{1}{p}}(x+1)^{-1}\mathrm{d}x$.

9 第九周课程 2024.4.16;2024.4.19

题 15

求证: $f\in L^p(X,\mathrm{d}\mu)\Longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{kp}\lambda_f(2^k)<+\infty$.

题 16

设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 实值可测函数, 若 f 在 $\mathbb{R}^n$ 的有界集上有界, 则 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n,\mathrm{d}m)$, 其中 $\mathrm{d}m$ 为 Lebesgue 测度, 特别地, 若 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上实值连续函数. 求证 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n,\mathrm{d}m)$.

10 第十周课程 2024.4.23;2024.4.26

题 17

设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n), \|f\|_1\neq 0$, 则 $\exists C,R>0$, 使得当 $|x|>R$ 时, $Mf(x)>C\,|x|^{-n}$.

题 18

设 m 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度, E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Borel 集, 定义 E 在 $x\in\mathbb{R}^n$ 点的密度为 $D_E(x)=\lim_{r\to 0}\frac{m(E\cap B(x,r))}{m(B(x,r))}$. 求证 $D_E(x)=\begin{cases}1, \text{几乎处处} x\in E\\ 0, \text{几乎处处} x\notin E\end{cases}$.

11 第十一周课程 2024.4.30

题 19

(1) 设 $1 < p < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. 求证: $f * g$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续的有界函数.

(2) 设 $C_c(\mathbb{R}^n) = \{f\text{在}\mathbb{R}^n\text{上连续, 且}\operatorname{supp} f\text{是紧的}\}$, $C_0(\mathbb{R}^n) = \{f\text{在}\mathbb{R}^n\text{上连续, 且} \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$. 求证: $C_c(\mathbb{R}^n)$ 在 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

(3) 求证: $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

12 第十二周课程 2024.5.7;2024.5.10

题 20

设 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 且 $S = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}$ 有有限 Lebesgue 测度. 对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意可测集 E, 求证 $\displaystyle\int_E \left|\hat{f}(\xi)\right| \mathrm{d}\xi \le \|f\|_{L^2}^2 \, |S| \, |E|$.

13 第十三周课程 2024.5.14