学生习作

对一道美国国家队选拔考试题的探究

陈昱达

指导教师 王 浩

（天津市新华中学高二（1）班，300204）

中图分类号：O123.1 文献标识码：A 文章编号：1005－6416(2022)03－0015－03

题目 已知不等边锐角$\triangle ABC$的外接圆为$\odot O$，T为直线BC上一点，且满足$\angle TAO=90°$. 以AT为直径的圆与$\triangle BOC$的外接圆交于A_1、A_2两点，$OA_1<OA_2$. 类似定义点B_1、B_2、C_1、C_2. 证明：

（1）AA_1、BB_1、CC_1三线共点；

（2）AA_2、BB_2、CC_2三线共点，且该点在$\triangle ABC$的欧拉线上. [1]

（2016，美国国家队选拔考试）

第（1）问只需证明三线共点于$\triangle ABC$的陪位重心即可. 本文主要讨论第（2）问所延伸出的几何性质.

先给出本题命题者陈谊廷对（2）的解答.

证法1 如图1，设$\triangle ABC$的切线三角形为$\triangle XYZ$，其外接圆为Γ.

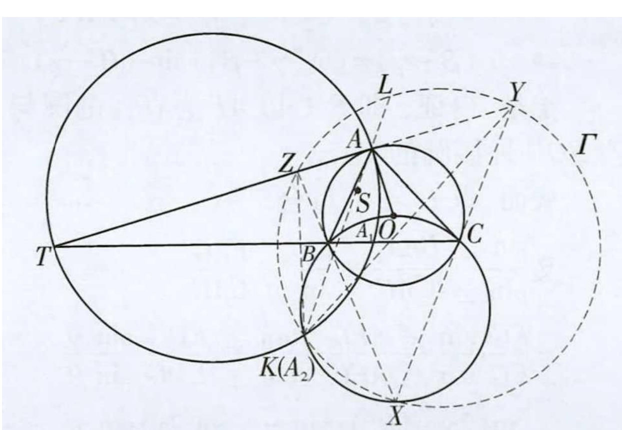

图1

由于X为BC关于$\odot O$的极点，故点X在$\triangle BOC$的外接圆上.

设K为圆Γ与$\triangle BOC$外接圆的第二个交点. 则K为完全四边形$YZTBXC$的密克点.

故$\triangle KZB \backsim \triangle KYC$

$$\Rightarrow \frac{ZK}{YK}=\frac{ZB}{YC}=\frac{ZA}{YA}$$

$\Rightarrow KA$平分$\angle ZKY$.

由于T、Z、A、Y四点构成调和点列，于是，$\angle TKA=90°$，从而，点K在以AT为直径的圆上.

因此，点K与A_2重合.

下面证明：AK过$\triangle ABC$的欧拉线上的一个定点.

设L为圆Γ的弧$\overparen{YZ}$的中点. 则KA过点L. 设Γ与$\odot O$的外位似中心为S. 则A、L为位似对应点. 于是，直线AL过点S，即直线AA_2过点S.

类似地，直线BB_2、CC_2过点S.

从而，AA_2、BB_2、CC_2三线共点.

由于过点O和$\triangle XYZ$外心的直线与$\triangle ABC$的欧拉线重合，故点S在$\triangle ABC$的欧拉线上. [2]

由上述证明可导出AA_2、BB_2、CC_2三线所共点（记为点S）的性质1.

性质1 S为$\triangle ABC$外接圆与其切线三角形外接圆的外位似中心.

笔者经过探究，给出了该题的另一证法，且由该证法可获得点S的更多性质.

收稿日期：2021－11－30

为叙述方便，记 $AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，$\angle CAB=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$\angle BCA=\gamma$，$\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R. 再记 $\triangle ABC$ 的垂足三角形为 $\triangle DEF$，切线三角形为 $\triangle XYZ$.

证法2 如图2，OD 的延长线与 $\triangle BOC$ 的外接圆交于点 P，作 $DG\perp EF$，反向延长，与 BC 的垂直平分线交于点 Q.

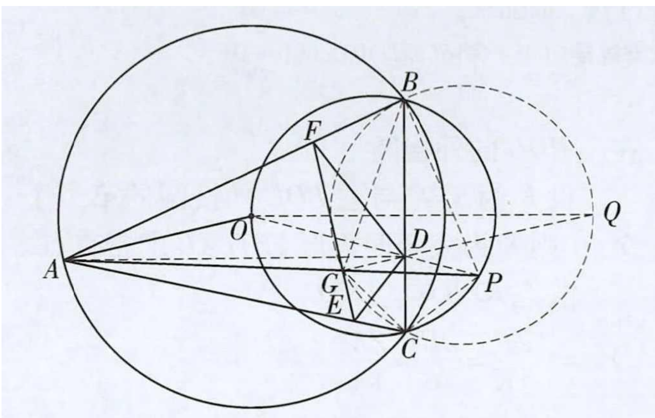

图2

由于 GB、GD、GC、GE 成调和线束，且 $DG\perp EF$，则 GD 平分 $\angle BGC$.

故 B、G、C、Q 四点共圆.

由熟知的定理得

$OD\cdot OP=OB^2=OA^2$.

从而，$\triangle OAD\backsim\triangle OPA$.

又由圆幂定理得

$DO\cdot DP=DB\cdot DC=DQ\cdot DG$.

由 $QO=R\cos\alpha+\left(c\cos\beta-\dfrac{a}{2}\right)\tan\angle QDB$

$=R\cos\alpha+R\cos(\beta-\gamma)$

$=2R\sin\beta\cdot\sin\gamma=AD$,

又 $AD/\!/QO$，则

四边形 $ADQO$ 为平行四边形

$\Rightarrow DQ\cdot DG=AO\cdot DG$

$\Rightarrow\triangle OAD\backsim\triangle DPG$.

故 $\triangle OPA\backsim\triangle DPG$

$\Rightarrow\angle APO=\angle GPD$

$\Rightarrow A$、G、P 三点共线.

如图3.

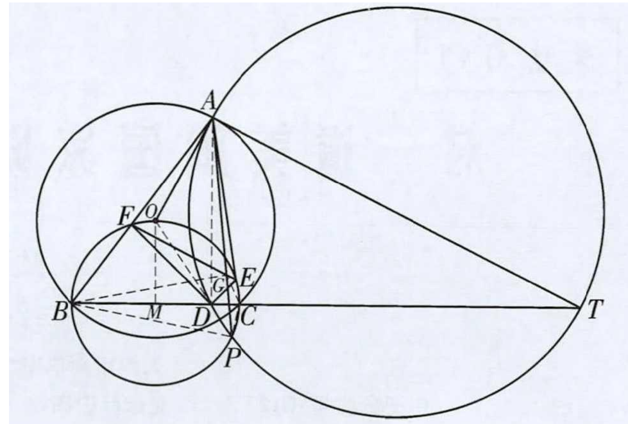

图3

由三弦定理知

点 P 在以 AT 为直径的圆上

$\Leftrightarrow DA\sin\angle TDP+DP\sin\angle TDA$
$=DT\sin\angle ADP$

$\Leftrightarrow DP=OP-OD=\dfrac{R^2}{OD}-OD$

$=\dfrac{R^2-OD^2}{OD}=\dfrac{DB\cdot DC}{OD}$

$\Leftrightarrow\dfrac{DA\cdot OM}{OD}+\dfrac{DB\cdot DC}{OD}=\dfrac{DT\cdot MD}{OD}$

$\Leftrightarrow DA\cdot OM+DB\cdot DC=DT\cdot MD$

$\Leftrightarrow OM-\cot\beta\cdot DC=\cot(\gamma-\beta)\cdot MD$

$\Leftrightarrow R\cos\alpha+\cot\beta\cdot b\cos\gamma$

$=\cot(\gamma-\beta)\cdot\left(c\cos\beta-\dfrac{a}{2}\right)$

$\Leftrightarrow\cos\alpha+2\cos\beta\cdot\cos\gamma$

$=\cot(\gamma-\beta)\cdot(2\sin\gamma\cdot\cos\beta-\sin\alpha)$

$\Leftrightarrow\cos(\beta-\gamma)=\cot(\gamma-\beta)\cdot\sin(\beta-\gamma)$.

于是，得证，即 P 是以 AT 为直径的圆与 $\triangle BOC$ 外接圆的交点.

从而，点 P 与 A_2 重合.

又 $\dfrac{\sin\angle BAA_2}{\sin\angle A_2AC}=\dfrac{\sin\angle FAG}{\sin\angle GAE}$

$=\dfrac{FG}{EG}\cdot\dfrac{\sin\angle AFG}{\sin\angle AEC}=\dfrac{\tan\angle FDG}{\tan\angle EDG}\cdot\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}$

$=\dfrac{\tan(2\gamma-90^\circ)}{\tan(2\beta-90^\circ)}\cdot\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\dfrac{\cot2\gamma\cdot\sin\gamma}{\cot2\beta\cdot\sin\beta}$,

故由上式的轮换性有

$$\frac{\sin\angle BAA_2}{\sin\angle A_2AC}\cdot\frac{\sin\angle ACC_2}{\sin\angle C_2CB}\cdot\frac{\sin\angle CBB_2}{\sin\angle B_2BA}=1.$$

从而，由角元塞瓦定理，知 AA_2、BB_2、CC_2 三线共于点 S.

由上述过程可推出点 S 的性质 2、3.

性质 2　S 为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的垂足三角形的透视中心.

性质 3　若 D、E、F 以 $\triangle ABC$ 外接圆为反演基圆反演，设其反演点分别为 A'、B'、C'，则 S 为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的垂足三角形的透视中心.

下面证明点 S 在 $\triangle ABC$ 的欧拉线上.

如图 4，设 $\triangle ABC$ 的垂心 H（即 $\triangle DEF$ 的内心）关于 EF、FD、DE 的对称点分别为 H_1、H_2、H_3，AD 与 EF 交于点 D'.

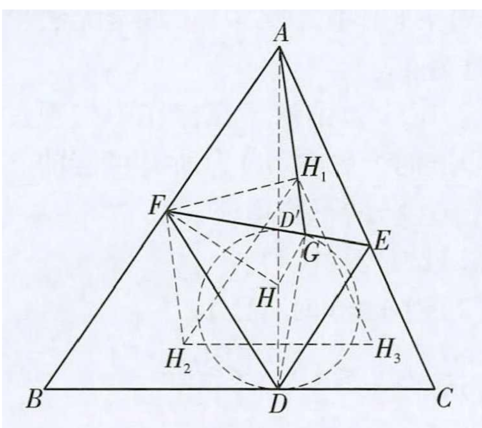

图 4

则由轴对称，有 $FH_1=FH=FH_2$，且

$\angle H_1FE=\angle EFH=\angle HFD=\angle DFH_2$.

于是，$\angle F_1H_1H_2=\dfrac{180^\circ-2\angle EFD}{2}$

$=2\gamma-90^\circ$，

$\angle AFH_1=\gamma-\dfrac{\angle EFD}{2}=2\gamma-90^\circ=\angle FH_1H_2$.

从而，$H_1H_2 /\!/ AB$.

类似地，$H_2H_3 /\!/ BC$，$H_3H_1 /\!/ CA$.

故 $\triangle H_1H_2H_3$ 与 $\triangle ABC$ 位似.

考虑 A 为 $\triangle DEF$ 的旁心. 则 A、D'、H、D 为调和点列. 故以 DD' 为直径的圆是以 A、H 为定点的一个阿波罗尼斯圆，且点 G 在圆上. 由轴对称与阿波罗尼斯圆的性质知

$\angle H_1GD'=\angle HGD'=\angle AGD'$.

从而，A、H_1、G 三点共线.[3]

由性质 2，得 $\triangle H_1H_2H_3$ 与 $\triangle ABC$ 的位似中心是 S.

因此，得到性质 4.

性质 4　若 $\triangle ABC$ 的垂心 H 关于 EF、FD、DE 的对称点分别为 H_1、H_2、H_3，则 S 为 $\triangle H_1H_2H_3$ 与 $\triangle ABC$ 的位似中心.

如图 5，设 H 关于 BC、CA、AB 的对称点分别为 P、Q、R.

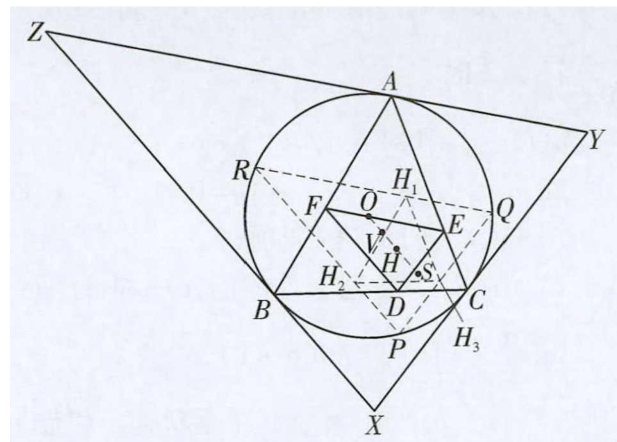

图 5

则由轴对称，知点 H_1、H_2、H_3 分别在 QR、RP、PQ 上，且 $QR /\!/ EF /\!/ YZ$.

由轮换性，知 $\triangle PQR$ 为 $\triangle H_1H_2H_3$ 的切线三角形.

而 $\triangle H_1H_2H_3$ 与 $\triangle ABC$ 位似于点 S，故由对应关系，知 $\triangle PQR$ 与 $\triangle XYZ$ 也位似于点 S. 于是，$\triangle XYZ$ 的九点圆圆心 O（即 $\triangle ABC$ 的外心）、$\triangle ABC$ 的九点圆圆心 V、位似中心 S 共线.

又由于 OV 即为 $\triangle ABC$ 的欧拉线，从而，点 S 在其欧拉线上.

由此，可推出性质 5.

性质 5　若 H 关于 BC、CA、AB 的对称点分别为 P、Q、R，则 S 为 $\triangle PQR$ 与 $\triangle XYZ$ 的位似中心.

参考文献：

[1]　2016 美国国家队选拔考试[J]. 中等数学，2018(08)：39.

[2]　陈谊廷. Dual concurrence of cevians in symmedian picture [EB\OL]. (2016－12－12)[2021－10－31]. http://artofproblemsolving.com/community/c6h1352164p7389108.

[3]　张峻铭. 2799 位似专题[EB\OL]. (2019－05－30)[2021－10－31]. http://tieba.baidu.com/p/6147487492.