第 17 届沙雷金几何奥林匹克试题与解析

陈昱达[1] 甘润知[2] 张冠宇[3] 马飞雁[4]

(1. 天津市新华中学, 300204; 2. 华东师范大学第二附属中学, 201203;
3. 天津市第一中学, 300054; 4. 清华大学, 100084)

1. 前言与致谢

第 17 届沙雷金 (Sharygin) 几何奥林匹克在俄罗斯莫斯科州的杜布纳举行. 决赛于 2021 年 7 月 31 日至 2021 年 8 月 1 日举行, 每一天考试时间都为 4 小时(10:00-14:00), 每一天考试有 4 道题, 参赛选手分为 8, 9, 10 (或 11) 三个年级组.

下面我们给出决赛的解答与评析, 解答人姓名随解答给出. 同时感谢来自北京质心教育科技有限公司的杨丕业老师, 对试题进行了翻译[1], 并在我们撰写解答时提供宝贵的建议.

2. 试 题

8-1. 设 $ABCD$ 是一个凸四边形, 满足 $\triangle ABC$ 的外心与内心刚好分别和 $\triangle ADC$ 的内心与外心重合. 已知 $AB=1$, 求 $ABCD$ 另外三边的长度, 以及四个角的角度.

8-2. 三条平行直线 l_a, l_b, l_c 过 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A, B, C. 作高 AH_a 关于 l_a 的对称直线 a, 类似地也作出 b, c. 证明: a, b, c 三线共点.

8-3. 三只螳螂在一个圆上绕着同样的方向匀速爬行. 已知这三只螳螂爬行的起点都为点 S, 螳螂 B 的速度是螳螂 A 的两倍, 螳螂 C 的速度是螳螂 A 的三倍. 在线段 SC 上作出两点 X, Y 满足 $SX=XY=YC$, 设 AX, BY 交于点 Z, 求 $\triangle ZAB$ 重心的轨迹.

8-4. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, H 为垂心, A_1, C_1 分别是 A, C 向对边所引垂线的

修订日期: 2021-09-29.

垂足, A_2, C_2 分别是 A_1, C_1 关于 AC 的对称点. 证明: $\triangle C_2HA_1$ 和 $\triangle C_1HA_2$ 的外心之间的距离刚好等于 AC 的长.

8-5. 已知 A_1, A_2, A_3, A_4 四点不共圆, B_1, B_2, B_3, B_4 四点也不共圆. 对任意 $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\triangle A_iA_jA_k$ 和 $\triangle B_iB_jB_k$ 的外接圆半径都刚好相等. 请问我们是否一定可以得到: 对任意 i, j 都有 $A_iA_j = B_iB_j$?

8-6. 已知 $\triangle ABC$ 是一个锐角三角形, 点 P 满足 $AP = AB$ 且 $PB \parallel AC$, 点 Q 满足 $AQ = AC$ 且 $CQ \parallel AB$. 设线段 CP, BQ 交于点 X, 证明: $\triangle ABC$ 的外心在 $\odot(PXQ)$ 上.

8-7. 在凸五边形 $ABCDE$ 中, 五个角 $\angle CAB, \angle BCA, \angle ECD, \angle DEC, \angle AEC$ 都相等. 证明: CE 平分 BD.

8-8. 请问是否存在一个凸多边形, 满足其所有边长都相等, 并且由这个凸多边形的任意三个顶点组成的三角形都是钝角三角形?

9-1. 在 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别是直线 BC, CA, AB 上的点, 满足 AD, BE, CF 交于 $\triangle ABC$ 内的一点. 已知 AF, FB, BD, DC, CE, EA 的长度以一定顺序排列后可以得到一个等比数列, 证明: AD, BE, CF 的长度按照一定顺序排列后也可以得到一个等比数列.

9-2. 对任意圆内接五边形, 证明: 其面积与各对角线长度之和的比不会超过其外接圆半径的 $\frac{1}{4}$.

9-3. 在非等腰的锐角 $\triangle ABC$ 内取一点 T 满足 $\angle ATB = \angle BTC = 120°$. 设点 E 为过 $\triangle ABC$ 三边中点的圆的圆心. 若 B, T, E 共线, 求 $\angle ABC$ 的大小.

9-4. 定义两个三角形之间的距离为它们之间最近的两个顶点间的距离. 请问我们是否可以在平面内画出五个三角形, 使得其中任意两个三角形之间的距离等于这两个三角形的外接圆半径之和?

9-5. 设点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 点 X, Y 都在 BC 边上, 且满足 $AX = BX$, $AY = CY$. 证明: $\triangle AOB$ 的外心和 $\triangle AOC$ 的外心都在 $\triangle AXY$ 的外接圆上.

9-6. 在梯形 $ABCD$ 中, $BC \parallel AD$, 两条对角线交于点 O. 设点 M, N 分别在线段 BC, AD 上, $\odot(AMC)$ 在 C 处的切线与射线 NB 交于点 P, $\odot(BND)$ 在 D 处的切线与射线 MA 交于点 R. 证明: $\angle BOP = \angle AOR$.

9-7. 平面上画好了一个锐角三角形的三边所在直线, 甲想用一把无刻度直尺和一把圆规作出这个三角形的三条高线, 而乙却拿着一块橡皮擦干扰他. 每

一回合, 甲都可以任选两个平面上已标出的点并用直尺作出过这两个点的直线, 也可以任选一个已标出的点为圆心作一个过另一个已标出点的圆. 接着, 甲可以在平面上标记出任意数量的点(这些点可以是已画出的线的交点, 也可以是任何一条线上的任意点, 甚至是平面上任意一个点). 在甲这回合的操作结束后, 乙可以擦掉平面上至多三个已标出的点(甲下回合并不能选这些点为已知点来作图, 但是可以在下回合作图完毕之后再一次标出这些点). 已知甲先手, 甲乙二人轮流操作, 直到平面上所有已标出点都被擦干净为止. 请问甲是否一定可以画出该三角形的三条高线?

9-8. 将圆外切四边形 $ABCD$ 的内切圆记为 ω, 内切圆圆心记为 I. 设直线 AC, BD 交于点 P, 直线 AB, CD 交于点 E, 直线 AD, BC 交于点 F. 在 $\triangle EIF$ 的外接圆上取一点 K 满足 $\angle IKP = 90°$, 并设 ω 与射线 PK 交于点 Q. 证明: $\triangle EQF$ 的外接圆与 ω 相切.

10-1. 在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90°, CH$ 为高, HA_1, HB_1 分别为 $\angle CHB$ 和 $\angle AHC$ 的角平分线, E, F 分别为 HB_1, HA_1 的中点. 证明: 直线 AE, BF 的交点在 $\angle ACB$ 的角平分线上.

10-2. 设 $\triangle ABC$ 为一个非等腰三角形, A_0, B_0, C_0 分别为 BC, CA, AB 的中点, $\angle C$ 的角平分线分别与 A_0C_0 和 B_0C_0 交于点 B_1, A_1. 证明: 直线 AB_1, BA_1, A_0B_0 三线共点.

10-3. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$. 设 $\angle A$ 的角平分线与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 P, 直线 AC 上过 C 的垂线与 $\angle A$ 的角平分线交于点 K. 以 P 为圆心, PK 长为半径的圆交 $\triangle ABC$ 外接圆的劣弧 $\overset{\frown}{PA}$ 于点 D. 证明: $ABDC$ 是一个有内切圆的四边形.

10-4. 请问一个四棱锥的展开面是否可以是一个三角形?

10-5. 一条割线交一个圆于 A_1, B_1 两点, 这条割线又交另一个圆于 A_2, B_2 两点. 另一条割线交第一个圆于 C_1, D_1 两点, 并又与第二个圆交于 C_2, D_2 两点. 证明: $A_1C_1 \cap B_2D_2$, $A_1C_1 \cap A_2C_2$, $A_2C_2 \cap B_1D_1$, $B_2D_2 \cap B_1D_1$ 四点共圆, 并且该圆与最初给定的两圆共轴.

10-6. 梯形 $ABCD$ 的两腰 AB, CD 交于点 S, $\angle ASC$ 的角平分线与梯形的两条底边交于点 K, L, 并且 K 在线段 SL 上. 在线段 SK 上取一个点 X, 再在线段 SL 往 L 方向的延长线上取一点 Y, 满足 $\angle AXC - \angle AYC = \angle ASC$. 证明: $\angle BXD - \angle BYD = \angle BSD$.

10-7. 设点 I 为直角 $\triangle ABC$ 的内心, 点 M 为斜边 AB 的中点. $\triangle ABC$ 外接圆在点 C 处的切线与过点 I 且平行于 AB 的直线交于点 P. 记 H 为 $\triangle PAB$ 的垂心, 证明: 直线 CH, PM 的交点在 $\triangle ABC$ 的内切圆上.

10-8. 在幸运停车场, 每辆车的前轮方向只有两种: “右”和“极右”, 所以每辆车都只能沿着以 r_1 或 r_2 为半径的弧线行驶. 一辆车停在 A 点, 车头朝北, 已知这辆车行驶了 l 的距离后停止, 且在行驶期间车头朝向的旋转角为 α $(< 2\pi)$. 求停车地点的轨迹.

3. 解答与评注

题 8-1. 设 $ABCD$ 是一个凸四边形, 满足 $\triangle ABC$ 的外心与内心刚好分别和 $\triangle ADC$ 的内心与外心重合. 已知 $AB = 1$, 求 $ABCD$ 另外三边的长度, 以及四个角的角度.

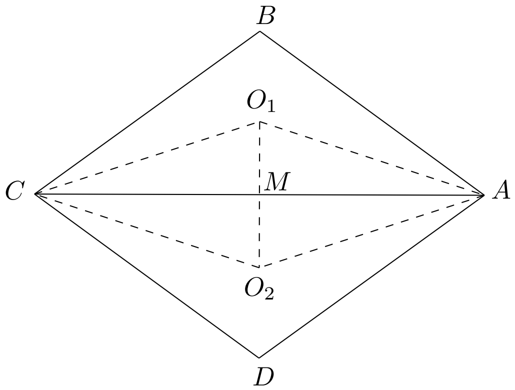

图 8-1

解 (马飞雁)

由题意, O_1, O_2 分别为 $\triangle ADC, \triangle ABC$ 的外心. 取 AC 中点 M, 则 $O_1M \perp AC, O_2M \perp AC$. 故 O_1, O_2, M 三点共线.

又 O_1, O_2 分别为 $\triangle BAC, \triangle DCA$ 的内心, 故

$$AM = (AC + AB - BC), CM = (AC + BC - AB)$$

且 $CM = AM$. 则 $AB = BC$, 同理 $CD = DA$. 故 B, O_1, M, O_2, D 五点共线.

又因为

$$\angle CO_1A = 2\pi - 2\angle D = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle B,$$

同理

$$\angle CO_2A = 2\pi - 2\angle B = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle D,$$

故 $\angle B=\angle D=108^\circ, \triangle ABC\cong\triangle ADC$. 故 $AB=BC=CD=DA=1$, 且 $\angle B=\angle D=108^\circ, \angle BAD=\angle BCD=72^\circ$. □

评注 这是一道相对容易的题目, 重要的是注意过程的严谨性. 若能尽快从题中较为特殊的条件联想到图形具有对称性, 经过简单推导即可得到答案.

题 8-2. 三条平行直线 l_a, l_b, l_c 过 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A, B, C. 作高 AH_a 关于 l_a 的对称直线 a, 类似地也作出 b, c. 证明: a, b, c 三线共点.

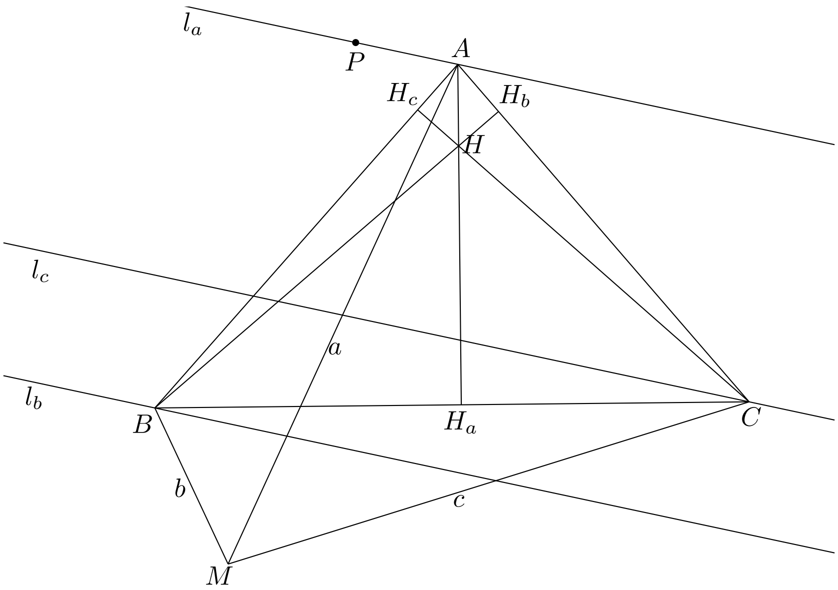

图 8-2

证明 (马飞雁)

取直线 b 与直线 c 的交点为 M, 令 $\angle CBl_b$ (表示 CB 与 l_b 的夹角, 下同) $=\alpha$, 由 $l_a \parallel l_b \parallel l_c$, 则 $\angle l_cCB=\alpha, \angle HAl_a=90^\circ-\alpha$.

由对称性,

$$\angle HCl_c=90^\circ-\angle B-\alpha=\angle l_cCM;\ \ \angle HBl_b=90^\circ-\angle C+\alpha=\angle l_bBM,$$

故

$$\begin{aligned}\angle ABM+\angle ACM&=\angle ABH+2\angle HCl_c+\angle ACH+2\angle HBl_b\\&=(180^\circ-2\angle A)+2\left(180^\circ-\angle B-\angle C\right)\\&=180^\circ,\end{aligned}$$

则 A, B, M, C 四点共圆. 联结 MA, 则

$$\angle CAM=\angle CBM=\angle l_bBM+\angle CBl_b=90^\circ+\alpha-\angle C+a=90^\circ+2\alpha-\angle C,$$

故

$$\angle HAM = \angle CAM - \angle CAH = (90^\circ + 2\alpha - \angle C) - (90^\circ - \angle C) = 2\alpha,$$

则 $\angle PAM = \angle l_a AH = 90^\circ - \alpha, AM$ 为 AH_a 关于 l_a 的对称直线, 即 AM 与 a 重合. 故 a, b, c 三点共线于点 M, 得证. □

评注 本题更多侧重考查观察能力, 以及精确作出相对优美的图形的能力. 若能发现其中两线的交点在三角形外接圆上, 很容易就能通过共圆性质推出交点与另一顶点连线与所求直线重合, 从而迎刃而解.

题 8-3. 三只螳螂在一个圆上绕着同样的方向匀速爬行. 已知这三只螳螂爬行的起点都为点 S, 螳螂 B 的速度是螳螂 A 的两倍, 螳螂 C 的速度是螳螂 A 的三倍. 在线段 SC 上作出两点 X, Y 满足 $SX = XY = YC$, 设 AX, BY 交于点 Z, 求 $\triangle ZAB$ 重心的轨迹.

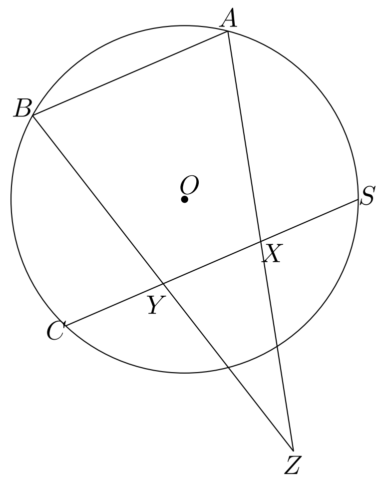

图 8-3

解 (陈昱达)

记螳螂爬行的圆为 $\odot O$. 以圆心 O 为原点建立复平面, 设该圆半径为 1, 再设 $S = 1, A = a(|a| = 1)$, 则 $B = a^2, C = a^3, X = \frac{2}{3} + \frac{a^3}{3}, Y = \frac{1}{3} + \frac{2a^3}{3}$.

由 Z 为 AX 和 BY 的交点可得

$$\begin{cases} A(\overline{X} - \overline{Z}) + X(\overline{Z} - \overline{A}) + Z(\overline{A} - \overline{X}) = 0, \\ B(\overline{Y} - \overline{Z}) + Y(\overline{Z} - \overline{B}) + Z(\overline{B} - \overline{Y}) = 0, \end{cases}$$

解得 $Z = -a - a^2$. 因此 $\triangle ZAB$ 的重心 $G = \frac{A+B+Z}{3} = 0 = O$. 故其重心的轨迹即为圆心 O. □

评注 本题形式简洁, 但三等分弦, 三等分弧的条件不便直接使用, 而复数

法处理该类问题效果较好, 且考虑到本题计算量较小, 故复数法是一个很好的选择.

题 8-4. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, H 为垂心, A_1, C_1 分别是 A, C 向对边所引垂线的垂足, A_2, C_2 分别是 A_1, C_1 关于 AC 的对称点. 证明: $\triangle C_2HA_1$ 和 $\triangle C_1HA_2$ 的外心之间的距离刚好等于 AC 的长.

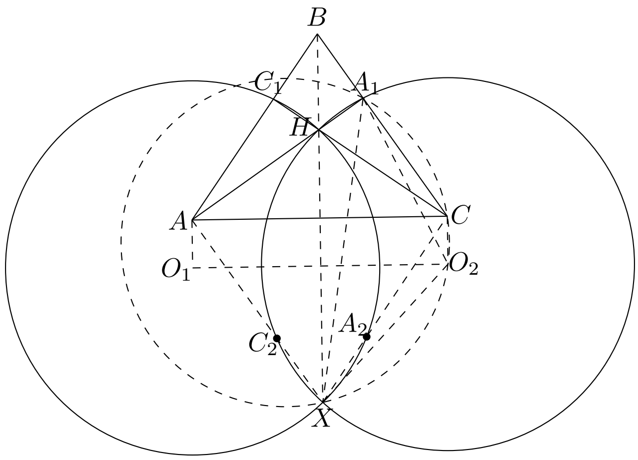

图 8-4

证明 (张冠宇)

设 $\triangle C_2HA_1$ 和 $\triangle C_1HA_2$ 的外心分别为 O_1, O_2, $AC_2 \cap CA_2 = X$, 则 X 是 B 关于 AC 的对称点. 由 $AH \cdot AA_1 = AC_1 \cdot AB = AC_2 \cdot AX$ 可知, X 在 $\odot O_2$ 上. 同理, X 在 $\odot O_1$ 上. 则 HX 是 O_1 和 O_2 的根轴, 从而 $HX \perp O_1O_2$.

注意到 $\angle A_1O_2X = 2\,(180^\circ - \angle A_1HX) = 2\angle BHA_1 = 2\angle ACB = \angle BCX$, 可知 A_1, C, O_2, X 共圆. 则

$$\angle A_1CO_2 = 180^\circ - \angle A_1XO_2 = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle A_1O_2X}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle A_1CX}{2}$$

即 $A_1CO_2 = 90^\circ + \angle ACB$, 故 $\angle ACO_2 = 90^\circ$, 同理 $\angle CAO_1 = 90^\circ$.

又有 $O_1O_2 \parallel AC$, 则 AO_1O_2C 为矩形, 从而 $O_1O_2 = AC$. □

评注 题精确作图后很容易发现要证明的矩形, 后面的过程便自然了, 属于简单题.

题 8-5. 已知 A_1, A_2, A_3, A_4 四点不共圆, B_1, B_2, B_3, B_4 四点也不共圆. 对任意 $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\triangle A_iA_jA_k$ 和 $\triangle B_iB_jB_k$ 的外接圆半径都刚好相等. 请问我们是否一定可以得到: 对任意 i, j 都有 $A_iA_j = B_iB_j$?

解 (陈昱达) 否. 构造如下:

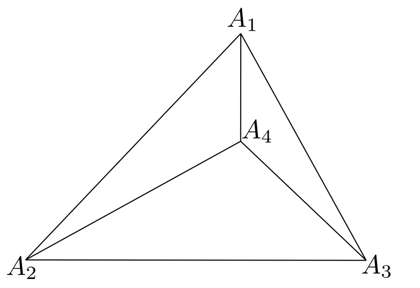

图 8-5

取非等腰且不重合的 $\triangle A_1A_2A_3 \cong \triangle B_2B_3B_4$, 且 A_4, B_1 分别为 $\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle B_2B_3B_4$ 的垂心.

注意到

$$\begin{aligned}R_{\odot(A_1A_2A_4)} &= \frac{A_1A_2}{\sin\angle A_1A_4A_2} = \frac{A_1A_2}{\sin\left(180^\circ - \angle A_1A_4A_2\right)}\\ &= \frac{A_1A_2}{\sin\angle A_1A_3A_2} = R_{\odot(A_1A_2A_3)},\end{aligned}$$

由轮换性可知, 对于任意的 $\triangle C_iC_jC_k(C \in \{A, B\}, i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\})$, 其外接圆半径均相等, 故更有题中结论成立. $\square$

评注 本题较为容易, 考虑到三角形垂心组相关知识即可举出反例.

题 8-6. 已知 $\triangle ABC$ 是一个锐角三角形, 点 P 满足 $AP = AB$ 且 $PB \parallel AC$, 点 Q 满足 $AQ = AC$ 且 $CQ \parallel AB$. 设线段 CP, BQ 交于点 X, 证明: $\triangle ABC$ 的外心在 $\odot(PXQ)$ 上.

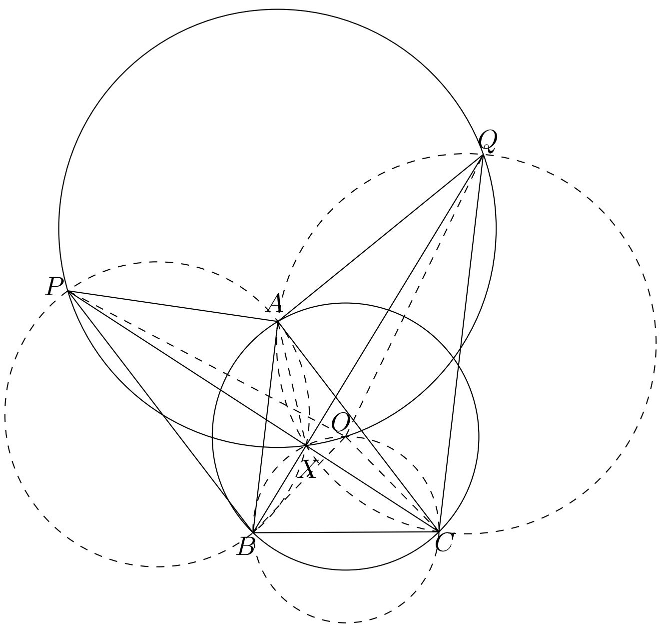

图 8-6

证明 (陈昱达)

设 $\odot(ABC)$ 的圆心为 O. 再设 $\odot(PAB)$ 与 CP 交于 X'. 则有

$$\angle AX'P=\angle ABP=\angle BAC=\angle ACQ=\angle AQC,$$

故 A,X',C,Q 四点共圆. 且

$$180^\circ-\angle BX'A=\angle BPA=\angle PBA=\angle BAC=\angle ACQ=\angle AX'Q,$$

故 B,X',Q 共线. 故 X 与 X' 重合, 即 $A,X,B,P;A,X,C,Q$ 分别共圆. 又

$$\angle BXC=\angle PXQ=\angle PBA+\angle QCA=2\angle BAC=\angle BOC,$$

故 B,X,O,C 共圆. 注意到 $\triangle APC\cong\triangle ABQ$, 则 $CP=BQ$. 且有 $\angle QBO=\angle PCO$, 则 $\triangle QBO\cong\triangle PCO$, 故 $\angle OPX=\angle OQX$, 即 P,Q,O,X 共圆. $\square$

评注 本题的核心在于观察到 B,X,O,C 共圆, 从而考虑到利用相似推出要证明的共圆, 总体来讲比较基础.

题 8-7. 在凸五边形 $ABCDE$ 中, 五个角 $\angle CAB,\angle BCA,\angle ECD,\angle DEC,\angle AEC$ 都相等. 证明: CE 平分 BD.

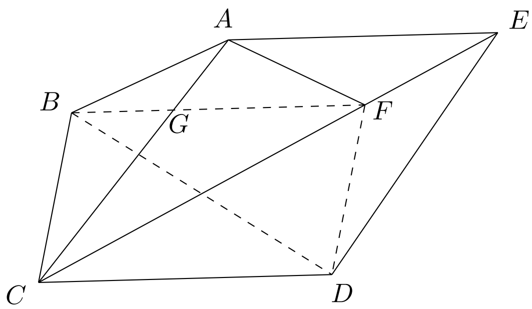

图 8-7

证明 1 (马飞雁)

作 $BF\parallel CD$ 交 CE 于点 F, 交 AC 于点 G, 联结 FD.易知 $AE\parallel BF\parallel CD$. 故 $\angle BFC=\angle BAC,B,C,F,A$ 四点共圆. 则

$$\angle BFA=\angle BCA=\angle BFC=\angle EAF=\angle FEA,$$

故 $AF=EF$.

又因为 $GF\parallel AE$, 故 $\frac{CG}{CF}=\frac{CA}{CE}=\frac{CB}{CD}$, 且 $\angle BCA=\angle DCE$. 故 $\triangle BCG\sim\triangle DCF,\angle BGC=\angle GCD=\angle BCF,\angle BGC=\angle CFD$. 故

$$\angle AGB=180^\circ-\angle BGC=180^\circ-\angle BCF=\angle BAF,$$

$$\angle AGB=180^\circ-\angle BGC=180^\circ-\angle CFD=\angle EFD,$$

则有 $\angle BAF=\angle EFD, \angle BFA=\angle FED, AF=EF$, 故 $\triangle AFB\cong\triangle FED$, 因此 $BF=DE=DC$, 且 $BF\parallel CD$, 故四边形 $BFDC$ 为平行四边形. 即有 CE 平分 BD. 得证! □

证明 2 (张冠宇)

由题意, 设这 5 个相等的角均为 α, 我们只需证明

$$BC\cdot\sin(\alpha+\angle BCE)=CD\cdot\sin\alpha.$$

等式两边同时乘 $2\cos\alpha$, 即证 $AC\cdot\sin\angle CAE=CE\cdot\sin\alpha$, 在 $\triangle ACE$ 中使用正弦定理, 可知上式是成立的. □

评注 这是一道很有意思的题目, 看似复杂, 实际可以完全利用初中范围内的知识完成解题. 看似怪异的题目条件并非无法下手, 思考过程的第一步则通过一定的推断, 来落实到具体的图形建构过程上, 从而获得部分结论. 在得到欲证结论中的平分条件, 和先前得到的平行关系后, 辅助线的添加就相对自然了. 相似和全等关系的寻找需要一定的观察力和逆推方法. 同时, 因为图形的建构可以通过题目条件逐步完成, 笔者认为此题也可以通过建立平面直角坐标系来解决, 有兴趣的读者不妨自行尝试.

题 8-8. *请问是否存在一个凸多边形, 满足其所有边长都相等, 并且由这个凸多边形的任意三个顶点组成的三角形都是钝角三角形?*

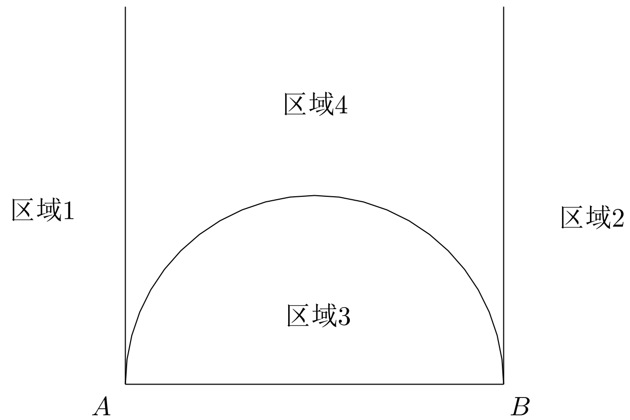

图 8-8

解 (甘润知) 不存在.

假设存在, 如图取一条边 AB, 不妨假设所有的顶点都在 AB 的上侧. 设 $AB=1$.

以 AB 为直径或一个半圆, 过 A, B 作 AB 的垂线, 将 AB 的上半侧平面分割为四个部分(不含边界), 那么所有的点都不可能出现在区域 4 内, 否则与

A, B 构成锐角三角形. 其次证明: 不可能有点 C 在区域 3 内, 否则 $BC<1$, 如果有点 $M_1, M_2, \ldots M_k$ 在区域 2 内, 则

$$BM_1^2+M_1M_2^2+M_2M_3^2+\cdots+M_kC^2<BC^2<1$$

矛盾.

如果没有点在区域 2 内, 则 $BC<1$, 矛盾.

那么所有点都在区域 1 或 2 内. 如果有点在区域 1, 也有点在区域 2, 那么取 N_s, N_{s+1} 为相邻的顶点, 且一个在区域 1, 一个在区域 2, 那么 $N_sN_{s+1}>1$, 矛盾.

如果所有点都在区域 1 或 2, 不妨所有点都在区域 1, 任取其中的 D 点, 那么 $BD>1$, 矛盾. 从而不存在这样的多边形. $\square$

评注 本题属于较容易的几何题. 容易想到如果存在这样的多边形, 那么这些多边形的顶点位置将受到很大的限制, 因此不难想到构造解答所示的多个区域以简化题目条件.

题 9-1. 在 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别是直线 BC, CA, AB 上的点, 满足 AD, BE, CF 交于 $\triangle ABC$ 内的一点. 已知 AF, FB, BD, DC, CE, EA 的长度以一定顺序排列后可以得到一个等比数列, 证明: AD, BE, CF 的长度按照一定顺序排列后也可以得到一个等比数列.

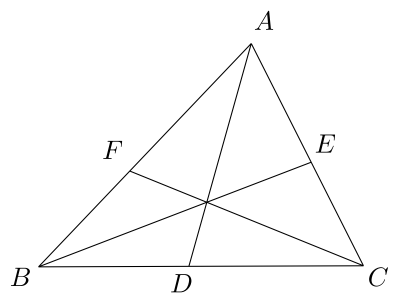

图 9-1

证明 (马飞雁)

由题意, 令 $\{AF, FB, BD, DC, EC, AE\}=\{a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, a_1q^4, a_1q^5\}$. 又由 Ceva 定理, $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$, 故

$$S=AF\cdot BD\cdot CE=FB\cdot DC\cdot EA=\sqrt{a_1^6q^{15}}=a_1^3q^{\frac{15}{2}},$$

且 $S=a_1^3q^{m+n+p}$, 其中 $0\leqslant m, n, p\leqslant 5, m, n, p\in\mathbb{Z}$.

故 $q=1$, 即 $AF=FB=BD=DC=CE=EA$, 故 $AB=BC=CA, D, E, F$ 分别为各边中点. 则 $AD=BE=CF$, 三者成等比数列, 得证! $\square$

评注 这是一道相对容易的题目, 题目条件简洁新颖, 将三线共点和数列糅合在一起. 本题的关键即是顺利转化题目条件为 Ceva 定理和等比数列标准形式, 稍加思考即可得到答案.

题 9-2. 对任意圆内接五边形, 证明: 其面积与各对角线长度之和的比不会超过其外接圆半径的 $\frac{1}{4}$.

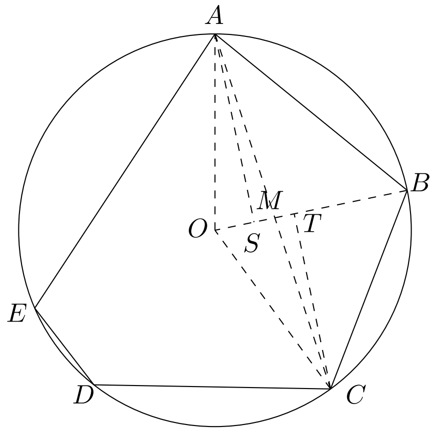

图 9-2

证明 1 (马飞雁) 不妨设五边形 $ABCDE$ 为单位圆的内接五边形, 其圆心为 O, A, C 在 BO 上的投影分别为 S, T, AC 交 BO 于 M. 故

$$2S_{ABCDE} = S_{AOCB} + S_{BODC} + S_{COED} + S_{DOAE} + S_{EOBA}.$$

由于

$$\begin{aligned} S_{AOCB} &= S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}(\sin\angle AOB + \sin\angle BOC) \\ &\le \frac{1}{2}(AS + CT) \le \frac{1}{2}(AM + CM) = \frac{1}{2}AC. \end{aligned}$$

故同理可得

$$2S_{ABCDE} \le \frac{1}{2}(AC + BD + CE + DA + EB),$$

则

$$\frac{S_{ABCDE}}{AC + BD + CE + DA + EB} \le \frac{1}{4} = \frac{1}{4}R.$$

得证. □

证明 2 (张冠宇) 记该五边形为 $A_1A_2A_3A_4A_5$, 不妨设其外接圆为单位圆, A_iA_{i+1} 所对圆心角为 θ_i, 下标模 5 处理. 则所证等价于

$$\frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{5}\sin\theta_i}{2\sum\limits_{i=1}^{5}\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}} \le \frac{1}{4}.$$

只需注意到局部不等式

$$\sin\theta_i+\sin\theta_{i+1}=2\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+1}}{2}\le 2\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2},$$

上式即证. □

评注 本题稍难, 偏向组合几何, 需要巧妙地利用三角形与四边形的面积和, 来沟通五边形的面积与对角线长. 关键之处则是考虑如何对对角线完成转化和放缩, 所求命题中的面积条件也自然地启发对三角形和四边形面积的思考和转换, 颇有新意.

题 9-3. 在非等腰的锐角 $\triangle ABC$ 内取一点 T 满足 $\angle ATB=\angle BTC=120^\circ$. 设点 E 为过 $\triangle ABC$ 三边中点的圆的圆心. 若 B,T,E 共线, 求 $\angle ABC$ 的大小.

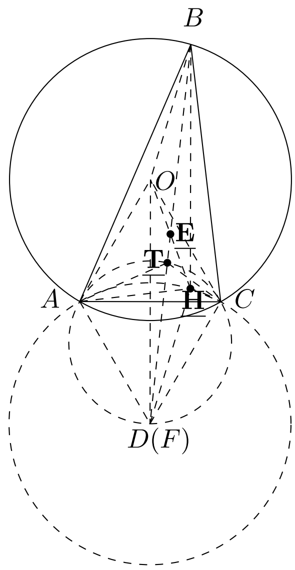

图 9-3

解 (陈昱达)

取 $\triangle ABC$ 的垂心 H, 作 $\triangle AHC$ 的外接圆 $\odot D$. 由垂心组的性质, $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 与 $\odot D$ 半径相等, 即 $OB=DH$. 由

$$\begin{aligned}\angle OBH+\angle BHD&=\angle ABC-2\left(90^\circ-\angle BCA\right)+\angle BHA+\angle AHD\\&=\angle ABC+\angle BCA+\angle HAD\\&=\angle ABC+\angle BCA+\angle OAC+\angle CAD=180^\circ\end{aligned}$$

知 $OB\parallel DH$, 因此四边形 $OBHD$ 为平行四边形. 而由欧拉线的性质得 E 为 OH 中点, 故 B,E,D 共线.

再以 AC 为一边向外作等边三角形 $\triangle ACF$. 又 $\angle ATC+\angle AFC=180^\circ$, 故 A,T,C,F 共圆. 且 $AF=CF$, 故 $\angle ATF=\angle CTF=60^\circ$. 因此 B,T,F 共线.

注意到 D, F 均在 AC 的中垂线上, 则若 D 与 F 不重合, 即有 $\angle TBN = \angle FBD \neq 0$, 故 D 与 F 重合. 则有

$$\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2} = \frac{\angle ADC}{2} = \frac{\angle AFC}{2} = 30^\circ.$$

□

评注 本题需要了解九点圆圆心以及 Torricelli 点的一些性质, 从而考虑到这两点的所在直线, 从而导出重合的关系.

题 9-4. 定义两个三角形之间的距离为它们之间最近的两个顶点间的距离. 请问我们是否可以在平面内画出五个三角形, 使得其中任意两个三角形之间的距离等于这两个三角形的外接圆半径之和?

解 否.

以三角形三个顶点为圆心, 以其外接圆半径为半径画圆, 称这三个圆的并集为该三角形的“云”. 若可以达到题设中的要求, 则这五个三角形的“云”两两相切. 而这是不可能的, 因为 K_5 是不可平面图. □

评注 本题乍一看无从下手, 但如果考虑到 5 的特殊性以及本题的图论意义, 就可以想到 K_5 的不可平面性, 从而巧妙地解决本题.

题 9-5. 设点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 点 X, Y 都在 BC 边上, 且满足 $AX = BX$, $AY = CY$. 证明: $\triangle AOB$ 的外心和 $\triangle AOC$ 的外心都在 $\triangle AXY$ 的外接圆上.

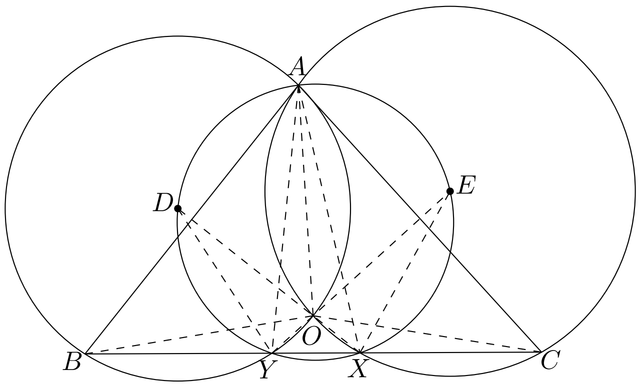

图 9-5

证明 (陈昱达) 由 $\angle AYB = \angle YAC + \angle ACB = 2\angle ACB = \angle AOB$ 可知, A, O, Y, B 四点共圆. 同理有 A, O, X, C 共圆.

设 D, E 分别为 $\triangle AOB$ 的外心和 $\triangle AOC$ 的外心. 故有 $\angle AYD = 90^\circ - \angle ABY = 90^\circ - \angle BAX = \angle AXD$, 即 A, D, Y, X 共圆. 同理有 A, E, Y, X 共圆,

故 A, D, Y, X, E 五点共圆. □

评注 本题较为容易, 只需观察到两组四点共圆, 问题便迎刃而解了.

题 9-6. 在梯形 $ABCD$ 中, $BC \parallel AD$, 两条对角线交于点 O. 设点 M, N 分别在线段 BC, AD 上, $\odot(AMC)$ 在 C 处的切线与射线 NB 交于点 P, $\odot(BND)$ 在 D 处的切线与射线 MA 交于点 R. 证明: $\angle BOP = \angle AOR$.

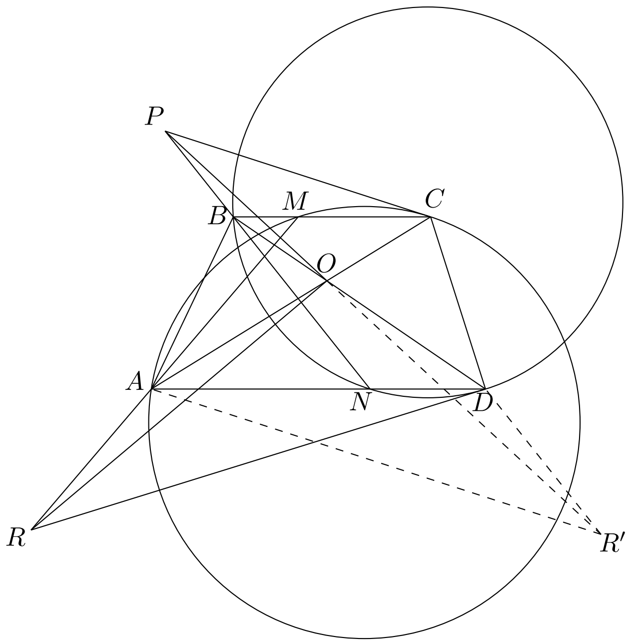

图 9-6

证明 (陈昱达) 作点 R 关于 $\triangle AOD$ 的等角共轭点 R'. 故由弦切角与平行线, 有 $\angle PCO = 180^\circ - \angle CMA = 180^\circ - \angle RAD = \angle R'AO$, 同理有 $\angle PBO = \angle R'DO$. 注意到 $\triangle AOD \sim \triangle COB$, 则 R' 与 P 为相似三角形的对应点, 故 $\angle BOP = \angle DOR' = \angle AOR$. □

评注 本题颇为巧妙, 起初笔者认为本题图形繁杂, 对于这两个圆更是无从下手. 但注意到等角共轭之后, 思路便逐渐变得清晰, 题中的相切仅是为了保证角等, 而非有其他的用意, 从而便顺利解决了本题.

题 9-7. 平面上画好了一个锐角三角形的三边所在直线, 甲想用一把无刻度直尺和一把圆规作出这个三角形的三条高线, 而乙却拿着一块橡皮擦干扰他. 每一回合, 甲都可以任选两个平面上已标出的点并用直尺作出过这两个点的直线, 也可以任选一个已标出的点为圆心作一个过另一个已标出点的圆. 接着, 甲可以在平面上标记出任意数量的点(这些点可以是已画出的线的交点, 也可以是任何一条线上的任意点, 甚至是平面上任意一个点). 在甲这回合的操作结束后,

乙可以擦掉平面上至多三个已标出的点(甲下回合并不能选这些点为已知点来作图, 但是可以在下回合作图完毕之后再一次标出这些点). 已知甲先手, 甲乙二人轮流操作, 直到平面上所有已标出点都被擦干净为止. 请问甲是否一定可以画出该三角形的三条高线?

解 (陈昱达) 是.

引理 1 给定两条直线 AB, AC, 可在不利用点 A 的情况下作出一条过 A 的直线.

证明 事实上, 在平面上任意给定一点 D, 均可在不利用点 A 的情况下作出 AD.

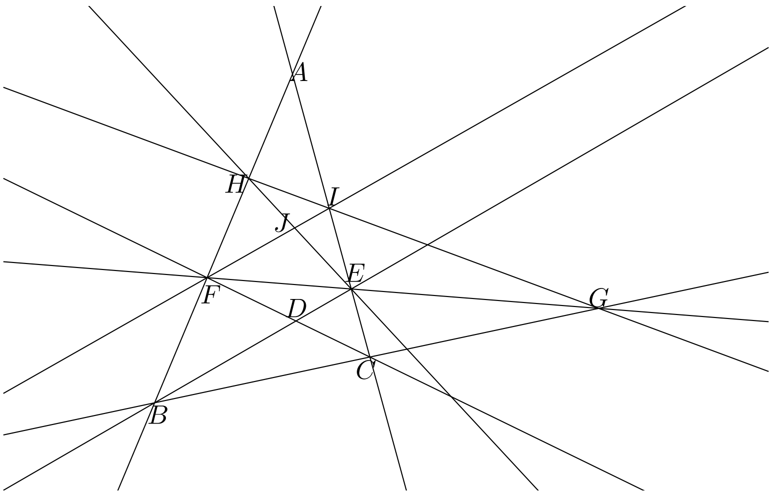

图 9-7.1

不妨设 D 在 AB, AC 间的区域内, 当 D 在该区域外时作图步骤相同. 步骤如下:

(1) 作 BD 交 AC 于点 E.

(2) 作 CD 交 AB 于点 F.

(3) 作 EF 交 BC 于点 G.

(4) 在 AB 上任取一点 H (异于 A, B), 作 GH 交 AC 于点 I.

(5) 取 EH, FI 的交点 J, JD 即为所求的过 A 的直线.

下证 A, J, D 共线. 由于

$$-1 = A[B, C; D, G] = A[F, E; D, G],$$

而 $A[F, E; J, G] = -1$, 则 A, J, D 共线.

引理 2 给定 $\triangle ABC$ 三边所在直线, 可在不利用点 A, B, C 的情况下作出 A 关于 BC 的垂线.

证明 (设下面过程中各点均不重合)

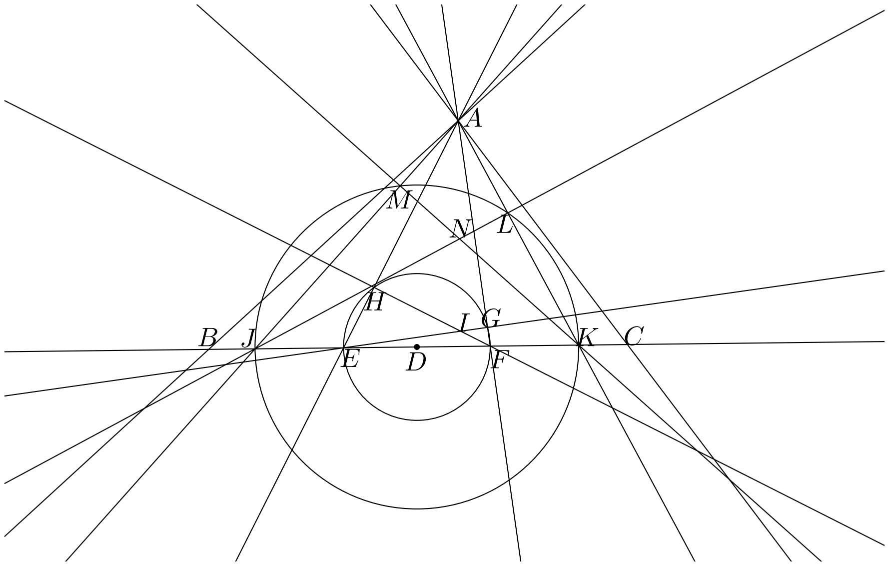

图 9-7.2

在 BC 上任取点 D,E, 以 D 为圆心, DE 为半径画圆, 与 BC 的另一个交点为 F. 由引理 1, 可作出 AE,AF (不利用点 A, 下同). 设以 EF 为直径的圆分别与 AE,AF 的另一交点为 H,G, 再连接 EG,FH, 交于点 I.

再在 BC 上取点 J, 以 D 为圆心, DJ 为半径画圆, 与 BC 的另一个交点为 K. 由引理 1, 可作出 AE,AF. 设以 JK 为直径的圆分别与 AJ,AK 的另一交点为 M,L, 再连接 JL,MK, 交于点 N. 此时 NI 即为点 A 关于 BC 的垂线.

这是因为, I,N 分别为 $\triangle AEF,\triangle AJK$ 的垂心, 因此有 $AI\perp BC, AN\perp BC$, 故 NI 是 A 关于 BC 的垂线.

作点 A 的高的策略如下:

(1) 每当有点被乙擦除, 甲就在下回合将这些点重新标出.

(2) 在 AB,AC 上各取7个点, 使得可以对平面上一点 D_1 使用4次引理1(最后可得到与 A,D_1 共线的点 $D_2,D_3,\cdots,D_5$).

(3) 在(2)的执行过程中, 若由于乙的干扰, 导致甲无法进行下一步操作, 那么甲暂时跳过这一步, 去执行可以操作的步骤. 且若在下次操作时, 之前未执行的某些操作变得可执行了, 则优先执行那些之前未执行的步骤.

(4) 上述操作执行完毕后, 此时在 $D_1,\cdots,D_5$ 中至少有两点未被乙擦除, 作过这两点的直线, 与 BC 交于 D_0.

(5) 多次执行上述操作, 得到 D_0,E_0,F_0,G_0,H_0,I_0.

(6) 此时仿照(2)(3)的方式, 在 $D_0,\cdots,I_0$ 中选择未被擦除的三点, 作为引理2中的 D,E,J, 执行操作; 之后进行轮换(将此三点作为 E,J,D 等), 再次操作.

(7) 经操作, 总可以得到在过点 A 的高上的至少六点, 因此一定可以选择出

未被擦除的三点进行连线, 从而作出 A 关于 BC 的高.

(8) 作 B, C 点的高与上述操作同理.

按上述策略, 甲一定可以画出该三角形的三条高线. $\square$

评注 本题具有两个难点, 其一是引理 1 的构思稍有特殊, 只有对调和与完全四边形熟悉的同学才能很快想到; 其二是本题在叙述策略时较为困难. 由此来看, 本题的位置是较为合适的.

题 9-8. 将圆外切四边形 $ABCD$ 的内切圆记为 ω, 内切圆圆心记为 I. 设直线 AC, BD 交于点 P, 直线 AB, CD 交于点 E, 直线 AD, BC 交于点 F. 在 $\triangle EIF$ 的外接圆上取一点 K 满足 $\angle IKP = 90°$, 并设 ω 与射线 PK 交于点 Q. 证明: $\triangle EQF$ 的外接圆与 ω 相切.

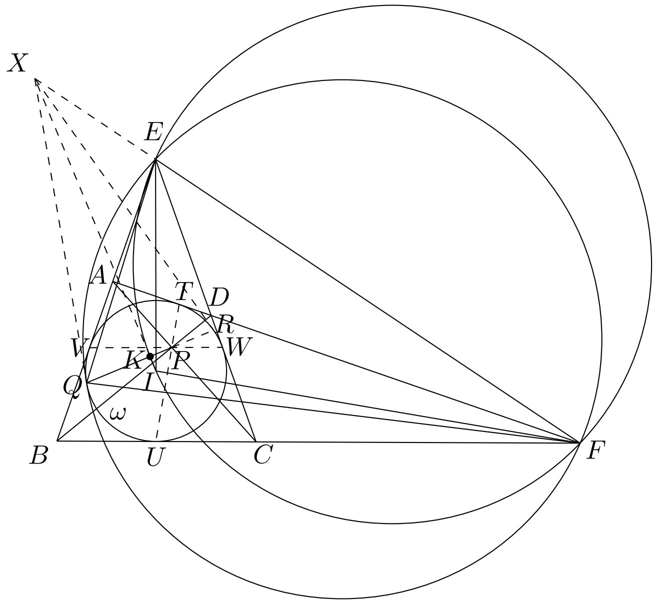

图 9-8

证明 (甘润知) 设内切圆 ω 且 AB, BC, CD, DA 于 V, U, W, T. 设 KP 交内切圆 ω 于 Q, R. 过 Q, R 作切线, 设两条切线的交点是 X. 由牛顿定理, 容易得知 TU, VW, AC, BD 四线交于一点, 因此 EF 是 P 关于 ω 的极线, 又因为 QR 过 P, 则 X, E, F 三点共线. 注意到 $\angle IKP = \frac{\pi}{2}$, 则

$$XQ^2 = XK \cdot XI = XE \cdot XF$$

因此 XQ 是 ω 与 $\triangle EQF$ 的公切线. 因此命题获证. $\square$

评注 本题是中等难度的几何题. 题目看似复杂, 实际上, 消去很多没有用的点后, 另外再注意到极点极线的相关理论便可解决本题.

题 10-1. 在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90°$, CH 为高, HA_1, HB_1 分别为 $\angle CHB$ 和 $\angle AHC$ 的角平分线, E, F 分别为 HB_1, HA_1 的中点. 证明: 直线 AE, BF 的交点在 $\angle ACB$ 的角平分线上.

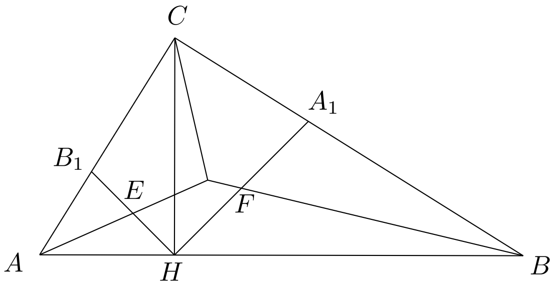

图 10-1

证明 (张冠宇) 在 $\triangle ABC$ 中使用角元 Ceva 定理, 则所证等价于

$$\frac{\sin\angle B_1AE}{\sin\angle HAE} = \frac{\sin\angle A_1BF}{\sin\angle HBF}.$$

由 E 是中点, 则有 $\frac{\sin\angle B_1AE}{\sin\angle HAE} = \frac{AH}{AB_1}$.

只需证明 $\frac{AH}{AB_1} = \frac{BH}{BA_1}$. 不难证明 $\triangle AHB_1$ 与 $\triangle CHA_1$ 相似, 利用角平分线定理, 上式即证. □

评注 这是一道简单题, 只需应用角元 Ceva 定理即可得到证明, 放在第一题可以很好地起到增加考生自信的作用.

题 10-2. 设 $\triangle ABC$ 为一个非等腰三角形, A_0, B_0, C_0 分别为 BC, CA, AB 的中点, $\angle C$ 的角平分线分别与 A_0C_0 和 B_0C_0 交于点 B_1, A_1. 证明: 直线 AB_1, BA_1, A_0B_0 三线共点.

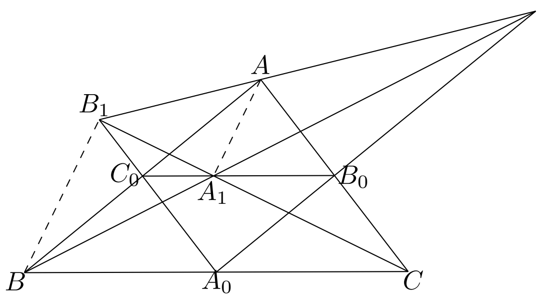

图 10-2

证明 (张冠宇) 由 CB_1 是角平分线, 且 $A_0B \parallel AC$ 可知 $BA_0 = CA_0 = B_0A_0$. 故 $BB_1 \perp A_1C$, 同理 $AA_1 \perp A_1C$, 则 $BB_1 \parallel AA_1$. 注意到 $\triangle AA_1B_0$ 与 $\triangle B_1BA_0$ 对应三边平行, 从而这两个三角形位似, 则 AB_1, BA_1, A_0B_0 共点. □

评注 大量的平行很容易让人联想到所共的点实际上是两个三角形的位似中心, 想到这点此题便可迎刃而解, 属于简单题.

题 10-3. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$. 设 $\angle A$ 的角平分线与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 P, 直线 AC 上过 C 的垂线与 $\angle A$ 的角平分线交于点 K. 以 P 为圆心, PK 长为半径的圆交 $\triangle ABC$ 外接圆的劣弧 $\overset{\frown}{PA}$ 于点 D. 证明: $ABDC$ 是一个有内切圆的四边形.

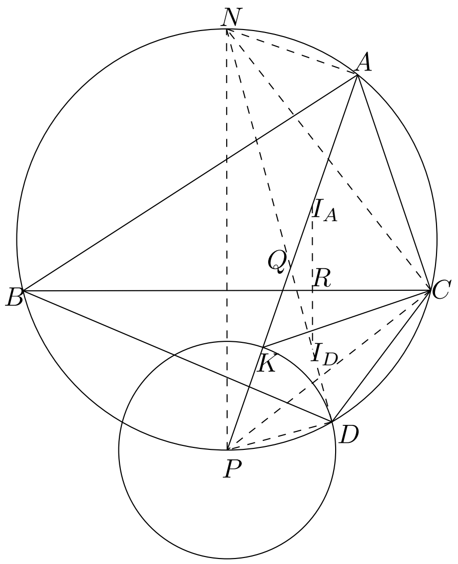

图 10-3.1

证明 1 (甘润知) 设 N 是弧 $\overset{\frown}{BAC}$ 的中点, I_A, I_D 是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 的内心, 易知 NI_DD, PI_AA 共线. 设 AP 交 ND 于 Q, I_AI_D 交 BC 于 R. 由于 $\angle NAP = \angle ACK = \frac{\pi}{2}$ 且 AP 平分 $\angle BAC$, 则

$$\angle PKC = \frac{\pi}{2} + \angle PAC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BAC = \angle NAC, \angle CPA = \angle CNA,$$

则有 $\triangle CNA \sim \triangle CPK$, 又 $\triangle AQN \sim \triangle DQP$, 因此

$$\frac{PQ}{NQ} = \frac{PD}{NA} = \frac{PK}{NA} = \frac{PC}{CN} = \frac{PI_A}{NI_D}.$$

从而 $I_AI_D \parallel NP$, 进而 $I_AI_D \perp BC$. 因此

$$CR = \frac{CA + CB - AB}{2} = \frac{CD + CB - BD}{2},$$

故 $AB + CD = AC + BD$, 即四边形 $ABDC$ 是圆外切四边形. □

证明 2 (陈昱达)

以 BC 中点为原点, $\overrightarrow{BC}$ 为 x 轴正方向, BC 的垂直平分线为 y 轴, 且使点 A 在第一象限, 建立平面直角坐标系. 设 $A(p, q)$ ($p > 0, q > 0$), $B(-1, 0), C(1, 0)$, 双曲线 C_0 以 B, C 为焦点且经过 A. 故可设 C_0 : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1-a^2} = 1$, 且 a 满足 $\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{1-a^2} = 1$.

由双曲线的光学性质可知 AP 为 C_0 在 A 处的切线. 因此 $l_{AP} : \frac{px}{a^2} - \frac{qy}{1-a^2} =$

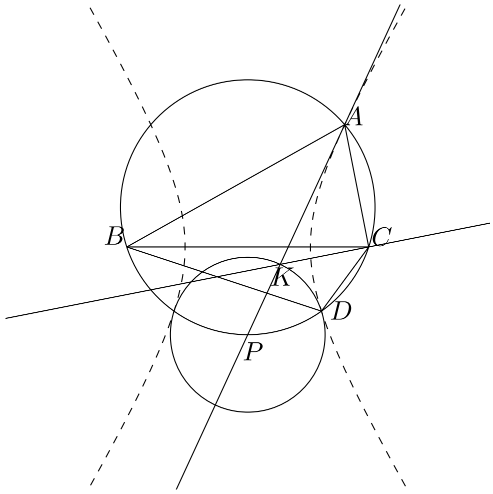

图 10-3.2

1, 又 AP 为 $\angle BAC$ 的角平分线, 因此 P 在 y 轴上, 则解得 $P\left(0,\frac{a^2-1}{q}\right)$. 设 $\odot(ABC)$ 的方程 $C_1: x^2+(y-k)^2=r^2$, 再代入 P,C 的坐标, 化简可得

$$C_1: x^2+\left(y-\frac{1-2a^2+a^4-q^2}{2\left(a^2-1\right)q}\right)^2=\left(\frac{1-2a^2+a^4+q^2}{2\left(a^2-1\right)q}\right)^2.$$

由 $CA\perp CK$ 知 $l_{CK}: y=\frac{1-p}{q}(x-1)$. 与 l_{AP} 联立知 $K\left(a^2,\frac{1-p}{q}\left(a^2-1\right)\right)$. 从而可得 $\odot P$ 的方程

$$C_2: x^2+\left(y-\frac{a^2-1}{q}\right)^2=a^4+\frac{p^2\left(a^2-1\right)^2}{q^2}.$$

用 $\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{1-a^2}=1$ 来代换 C_2 中的 p^2, 可得

$$C_2: x^2+\left(y-\frac{a^2-1}{q}\right)^2=a^4+\frac{a^2\left(a^2-q^2-1\right)\left(a^2-1\right)}{q^2}.$$

下面只需说明 C_1 与 C_2 的交点 D 在双曲线 C_0 上, 由对称性和同一法, 只需证 C_2,C_1 与 C_2,C_0 关于 y 的解相等.

$$\begin{aligned}C_2-C_1&:\left(y-\frac{a^2-1}{q}\right)^2-\left(y-\frac{1-2a^2+a^4-q^2}{2\left(a^2-1\right)q}\right)^2\\&=a^4+\frac{a^2\left(a^2-q^2-1\right)\left(a^2-1\right)}{q^2}-\left(\frac{1-2a^2+a^4+q^2}{2\left(a^2-1\right)q}\right)^2,\end{aligned}$$

化简可得 $y=-\frac{\left(a^2-1\right)^2}{q}$.

再考虑 $C_2-a^2C_0$, 化简可得 $\left(y+\frac{\left(a^2-1\right)^2}{q}\right)^2=0$, 即 $y=-\frac{\left(a^2-1\right)^2}{q}$. 因此 C_1 与 C_2 的交点 D 在双曲线 C_0 上. 故有 $BA-CA=BD-CD$, 即 $AB+CD=AC+BD$, 故四边形 $ABDC$ 有内切圆. □

证明 3 (张冠宇)

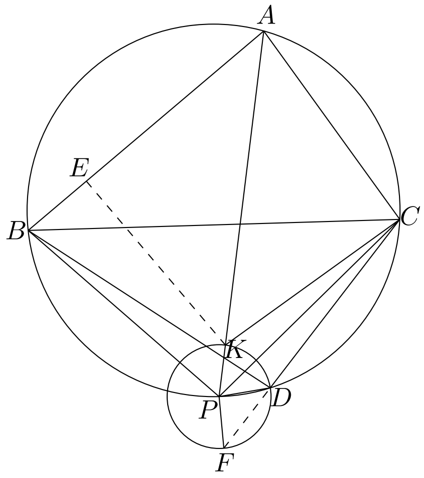

图 10-3.3

作 $KE \perp AB$ 于 E, 设 CD 与 $\odot P$ 交于 F, 则 $AE = AC$. 不难证明 $\triangle PDB \sim \triangle PFC$, 从而 $\triangle BDP \cong \triangle CFP$, 则 $BD = CF$.

我们希望证明 $AB + CD = AC + BD$, 从而证明原题. 这等价于 $DF = BE$, 即

$$c - b = \frac{PK}{PB} \cdot a,$$

即

$$c - b = \frac{\sin\left(C + \frac{A}{2}\right) - \frac{\sin B}{\cos\frac{A}{2}}}{\sin\frac{A}{2}} \cdot a,$$

故只需证

$$\sin C - \sin(A + C) = 2\left(\cos\frac{A}{2}\sin\left(C + \frac{A}{2}\right) - \sin(A + C)\right).$$

由和差化积公式不难验证其正确性. $\square$

评注 这是一个中档题, 四边形有内切圆的充要条件是对边长度和相等, 向着这一目标前进即可解决此题.

题 10-4. 请问一个四棱锥的展开面是否可以是一个三角形?

解 1 (陈昱达) 是, 构造如图 10-4.1:

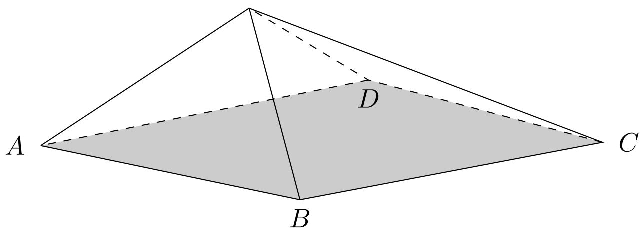

图 10-4.1

其中 $AB=BC=\frac{\sqrt{19}}{6}, AC=CD=SA=SC=\frac{2}{3}, DA=\frac{\sqrt{6}}{3}, SB=\frac{1}{2}, SD=\frac{1}{3}$, $BD=\frac{\sqrt{61}}{6}$. 其展开图如图 10-4.2:

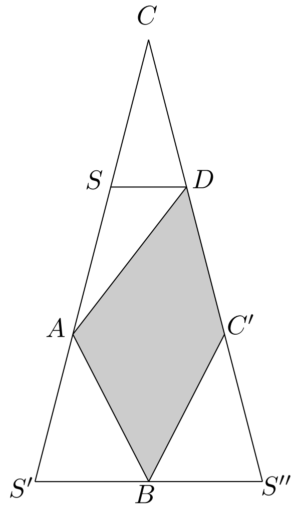

图 10-4.2

其中 $CS'=CS''=2, S'S''=1$, 且 S, A 与 D, C' 分别为 CS' 与 CS'' 的三等分点. 因此, 存在一个四棱锥的展开图是三角形. $\square$

解 2 展开图如图10-4.3:

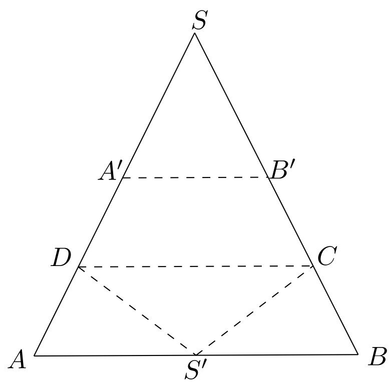

图 10-4.3

取 $\triangle SAB$, 满足 $SA=SB>AB$. 设 S' 是 AB 中点, A', B' 分别在边 SA, SB 上且满足 $SA'=SB'=S'A$, C, D 分别为 BB', AA' 的中点. 故可以将该三角形沿 $A'B'$ 和 CD 折起, 那么 S 将和 S' 重合.

此时 $\triangle SAD, \triangle SA'D, \triangle SBC, \triangle SB'C$ 全等, 因此可以将此三角形沿 SC 和 SD 折起, 此时 A 将与 A' 重合, 且 B 与 B' 重合. 按上述方法, 可以得到四棱锥 $S-ABCD$. $\square$

评注 本题是个十分新颖的题目, 其思路主要是寻找有可能可以折成四棱锥的三角形, 这需要在三角形中构造一些边相等的条件, 从而找到这样的三角形.

本题并不算很难，只需耐心调整边的长度，便可构造出一个例子，放在 10-4 着实有些容易了.

题 10-5. 一条割线交一个圆于 A_1, B_1 两点，这条割线又交另一个圆于 A_2, B_2 两点. 另一条割线交第一个圆于 C_1, D_1 两点，并又与第二个圆交于 C_2, D_2 两点. 证明: $A_1C_1 \cap B_2D_2$, $A_1C_1 \cap A_2C_2$, $A_2C_2 \cap B_1D_1$, $B_2D_2 \cap B_1D_1$ 四点共圆，并且该圆与最初给定的两圆共轴.

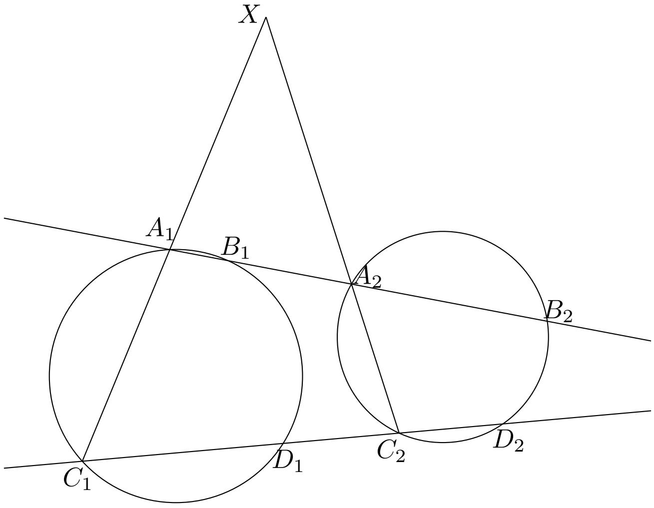

图 10-5

证明 (甘润知) 设 X 是 A_1C_1 与 A_2C_2 的交点，那么

$$\frac{XA_1 \cdot XC_1}{XA_2 \cdot XC_2} = \frac{\sin\angle B_2A_2C_2 \sin\angle D_2C_2A_2}{\sin\angle B_1A_1C_1 \sin\angle D_1C_1A_1} = \frac{A_2D_2 \cdot B_2C_2}{A_1D_1 \cdot B_1C_1} \cdot \frac{R^2_{A_1B_1C_1D_1}}{R^2_{A_2B_2C_2D_2}}$$

其余三点计算出的结果与上式相同，根据共轴圆系相关理论，原命题获证. □

评注 本题是对共轴圆系的基本定理的考察，直接套入公式即可.

题 10-6. 梯形 $ABCD$ 的两腰 AB, CD 交于点 S, $\angle ASC$ 的角平分线与梯形的两条底边交于点 K, L, 并且 K 在线段 SL 上. 在线段 SK 上取一个点 X, 再在线段 SL 往 L 方向的延长线上取一点 Y, 满足 $\angle AXC - \angle AYC = \angle ASC$. 证明: $\angle BXD - \angle BYD = \angle BSD$.

证明 1 (甘润知)

先作 C' 为 C 关于 SX 的对称点，再取 Y', 使得 $C'XY'A$ 共圆，则

$$\begin{aligned}\angle AXC &= \angle ASC + \angle XCS + \angle XAC = \angle SC'X + \angle SAX \\ &= \angle C'Y'X + \angle AY'X = \angle AY'C,\end{aligned}$$

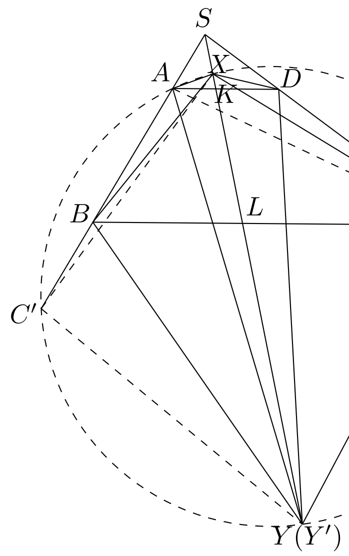

图 10-6.1

因此 $Y=Y'$, 从而 $SC'\cdot SA=SX\cdot SY=SC\cdot SA=SB\cdot SD$, 由 $\angle BSX=\angle CBX$, 则

$$\triangle SBX\sim\triangle SYD,\triangle SBY\sim\triangle SXD,$$

从而

$$\angle SBX=\angle SYD,\angle SYB=\angle SDX,$$

因此

$$\angle BXD-\angle BYD=\angle SBX+\angle SDX=\angle BYD.\qquad\square$$

证明 2 (张冠宇)

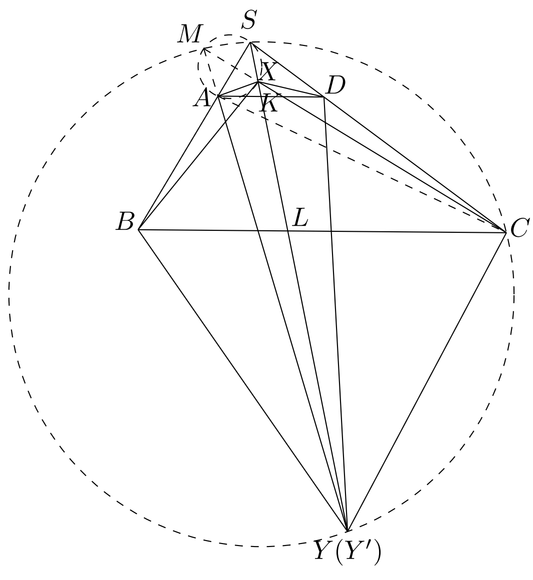

图 10-6.2

在直线 SL 上取 Y' 使 $\triangle SXA \sim \triangle SCY'$, 设 $\odot(SCY') \cap XC = M$, 则

$$\angle SMX = \angle SMC = \angle SY'C = \angle SAX,$$

便有 S, M, A, X 四点共圆, 又 $\angle XMA = \angle XSA = \angle CSY' = \angle CMY'$, 则 M, A, Y' 共线.

注意到 $\angle AY'C = \angle AY'S + \angle CY'S = \angle SAX + \angle SCX = \angle AXC - \angle ASC = \angle AYC$, 故 $Y = Y'$. 由 $SX \cdot SY = SA \cdot SC = SB \cdot SD$, 有 $\triangle SBY \sim \triangle SXD$, $\triangle SBX \sim \triangle SYD$. 则

$$\begin{aligned} \angle BXD - \angle BYD &= \angle BSD + \angle SBX + \angle SDX - (\angle SYD + \angle SYB) \\ &= \angle BSD. \end{aligned}$$

□

评注 本题属于中等偏易的几何题, 容易猜到解答中的相似, 因此会想到用同一法解决本题, 因此本题也就迎刃而解了.

题 10-7. 设点 I 为直角 $\triangle ABC$ 的内心, 点 M 为斜边 AB 的中点. $\triangle ABC$ 外接圆在点 C 处的切线与过点 I 且平行于 AB 的直线交于点 P. 记 H 为 $\triangle PAB$ 的垂心, 证明: 直线 CH, PM 的交点在 $\triangle ABC$ 的内切圆上.

证明 1 (张冠宇)

引理 1 $\triangle ABC$ 中, N 是 $\overset{\frown}{BAC}$ 的中点, I 是 $\triangle ABC$ 内心, T 是 $\angle A$ 中伪内切圆切点, 则 T, I, N 共线.

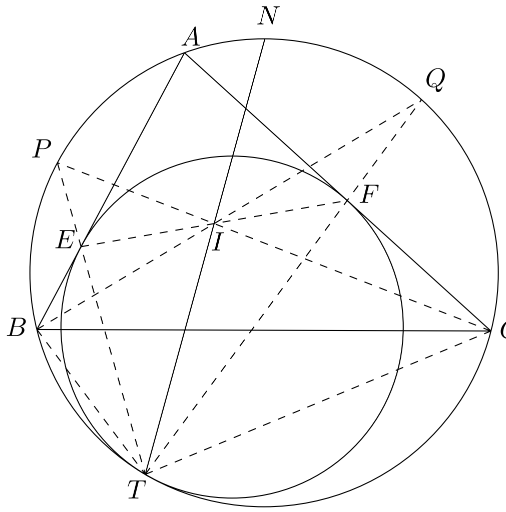

图 10-7.1

证明　设 E, F 分别是伪内切圆在 AB, AC 上的切点, $TE \cap \overset{\frown}{AB} = P, TF \cap \overset{\frown}{AC} = Q$, 则 P 是 $\overset{\frown}{AB}$ 中点, Q 是 $\overset{\frown}{AC}$ 中点. 且 B, I, Q 共线, C, I, P 共线. 由

Mannheim 定理得 E,I,F 共线, 则

$$\angle EIB=\angle AIB-\frac{\pi}{2}=\frac{\angle ACB}{2}=\angle PTB,$$

故 E,I,T,B 共圆. 同理, F,I,T,C 共圆. 则

$$\angle BTI=\angle AEI=\angle AFI=\angle CTI,$$

故 T,I,N 共线, 引理 1 得证.

引理 2 $\triangle ABC$ 中, I 是内心, T 是 $\angle A$ 中伪内切圆切点, 设点 A 与点 T 关于 $\odot(ABC)$ 的切线交于点 D, 则 $DI\parallel BC$.

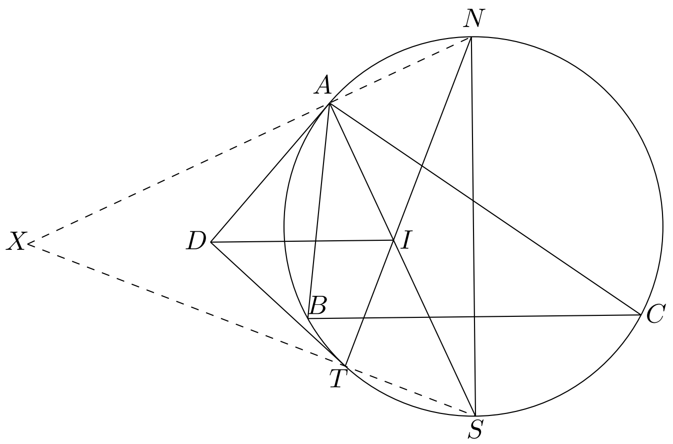

图 10-7.2

证明 设 N 为 $\overparen{BAC}$ 中点, S 为 N 的对径点. 由引理 1 知 T,I,N 共线, 又 A,I,S 共线. 对圆内接六边形 $NAASTT$ 使用 Pascal 定理可知 X,D,I 共线. 又由 I 是 $\triangle NXS$ 的垂心, 则 $DI\perp NS$, 故 $DI\parallel BC$. 引理 2 得证.

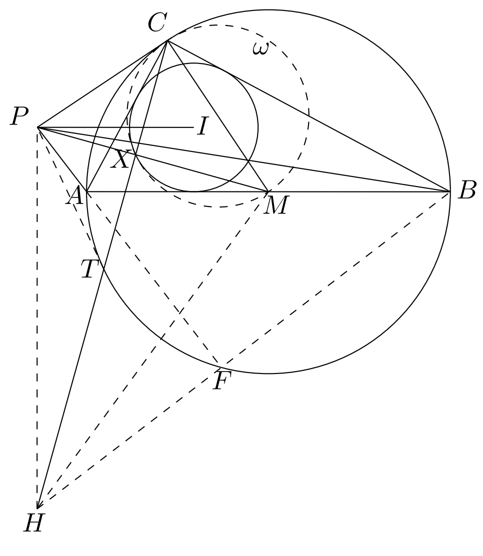

图 10-7.3

由引理 2 可知, 过 P 作 $\odot M$ 切线, 切点 T (异于 C)是 $C-$ 伪内切圆的切点. 则 $PM\perp CT$. 作以 CM 为直径的圆 ω (即为 $\triangle ABC$ 的九点圆). 则 X 在 ω, $\frac{CX}{CT}=\frac{1}{2}$.

注意到 ω 与 $\odot M$ 关于 C 是 $1:2$ 位似. $\odot I$ 与 $C-$ 伪内切圆是 $1:2$ 位似. 又 T 是切点, 则 ω 与 $\odot I$ 切于点 X.(X 事实上是 $\triangle ABC$ 的 Feuerbach 点.)

设 $PA\cap BH=F$, 则 F 在 $\odot M$ 上. 下证 $CH\perp PM$. 这等价于

$$HM^2-CM^2=HP^2-PC^2,$$

即

$$HF\cdot HB=HF^2+PF^2-PA\cdot PF,$$

即

$$HF\cdot FB=FP\cdot FA.$$

这由 A 是 $\triangle PHB$ 的垂心可知成立. 又有 $CT\perp PM$, 则 C,T,H 共线. 则 $CH\cap PM=X\in\odot I$, 原题得证. □

证明 2 (甘润知)

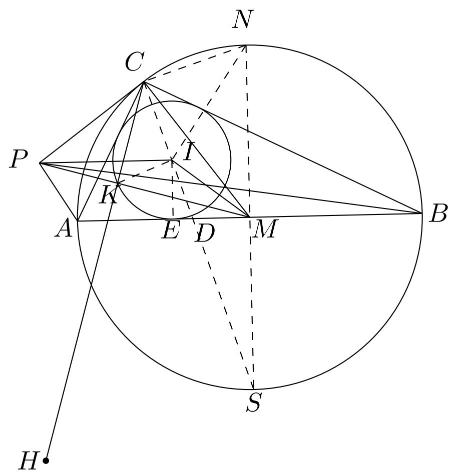

图 10-7.4

设 $\widehat{AB}$ 的中点为 S, $\widehat{ACB}$ 的中点是 N, 容易知道 CIS,NMS 三点共线. 设 CIS 较 AB 与 D,I 在 AB 上的投影是 E, 由于 $PI\parallel AB$, 因此

$$\angle PIC=\angle ADC=\frac{\pi}{2}+\angle BCA=\angle PCI$$

因此, $PI=PC$. 由勾股定理,

$$\begin{aligned}HM^2-HP^2&=\frac{1}{2}AH^2+\frac{1}{2}HB^2-\frac{1}{4}AB^2-HP^2\\&=\frac{1}{2}\left(AH^2-PH^2\right)+\frac{1}{2}\left(HB^2-HP^2\right)-\frac{1}{4}AB^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(AB^2 - BP^2\right) + \frac{1}{2}\left(AB^2 - PB^2\right) - \frac{1}{4}AB^2 \\
&= \frac{3}{4}AB^2 - \frac{1}{2}AP^2 - \frac{1}{2}BP^2 \\
&= \frac{1}{2}AB^2 - MP^2 \\
&= \frac{1}{4}AB^2 - CP^2 \\
&= MC^2 - PC^2,
\end{aligned}
$$

因此, $CH \perp MP$. 假设 CH 交 MP 于 K, 注意到 $CM = NM, PI = PC$,

$$\angle PCI = \angle PCS = \angle CNS$$

则 $\triangle CMN \sim \triangle CPI$, 因此由旋转相似得 $\triangle CNI \sim \triangle CMP$. 从而 $\angle CNI = \angle CMP$, 结合 $SA^2 = SB^2 = SI^2 = SM \cdot SN$, 有 $\triangle SMI \sim \triangle CIN$, 从而

$$\angle IME = \angle IMS - \frac{\pi}{2} = \angle NIS - \frac{\pi}{2} = \angle INC.$$

进一步, $\angle CMP = \angle IME$, 从而

$$\mathrm{Rt}\triangle IME \sim \mathrm{Rt}\triangle PMC.$$

结合射影定理, $PC^2 = PI^2 = PK \cdot PM$, 所以

$$\frac{IK}{IM} = \frac{PI}{PM} = \frac{PC}{PM} = \frac{IE}{IM},$$

因此 $IE = IK$, 因此 K 在内切圆上. □

评注 本题属于中等难度的几何题, 解答先利用了计算量比较大的勾股定理, 接着利用相似三角形推导比例解决. 虽说解答中推导 $CH \perp MP$ 的计算量较大, 但是最自然的做法还是用勾股定理方法.

题 10-8. *在幸运停车场, 每辆车的前轮方向只有两种: "右"和"极右", 所以每辆车都只能沿着以 r_1 或 r_2 为半径的弧线行驶. 一辆车停在 A 点, 车头朝北, 已知这辆车行驶了 l 的距离后停止, 且在行驶期间车头朝向的旋转角为 α $(< 2\pi)$. 求停车地点的轨迹.*

解 由于曲线长度和旋转角度已知, 那么这两种圆弧各自的总长也分别确定. 因此可以将问题修改为:

给定平面上一点 A 和一条以 A 为端点的射线 ℓ, 再给定两个量 r_1, r_2, 和两个角 α_1, α_2, 且满足 $r_1 > r_2, \alpha_1 + \alpha_2 < \pi$. 求满足下列条件的曲线 Γ 的终点 B 的轨迹:

(1) Γ 的始点为 A 且与 ℓ 切于 A;

(2) Γ 是一些半径为 r_1 与 r_2 的弧的并集, 并且半径为 r_1 的弧的圆心角之和为 $2\alpha_1$, 半径为 r_2 的弧的圆心角之和为 $2\alpha_2$;

(3) 两条相邻的弧在它们的公共端点处有公切线, 并且这两段弧位于该切线的同侧.

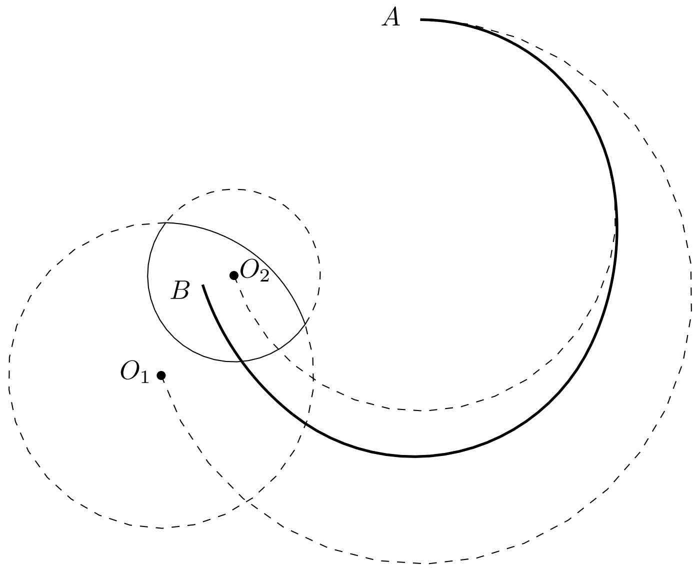

图 10-8.1

结论 设 $\widehat{AO_1}, \widehat{AO_2}$ 分别为满足条件(1)的弧, 且半径分别为 r_1, r_2, 弧的圆心角均为 $2(\alpha_1+\alpha_2)$. 考虑分别以 O_1, O_2 为圆心, 以 $2(r_1-r_2)\sin\alpha_2, 2(r_1-r_2)\sin\alpha_1$ 为半径的圆盘 W_1, W_2. 所求的轨迹即为两圆盘的公共区域(下简称为 W_1, W_2 的交界).

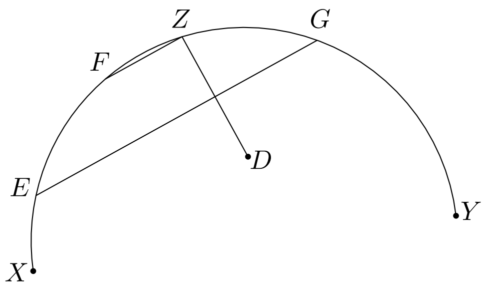

图 10-8.2

证明　设 $\widehat{PQ}$ 是 Γ 中一段半径是 r_1 的弧, R 为线段 PQ 上一点, 且满足 $PR:PQ=r_2:r_1$. 半径为 r_2 的 $\widehat{PR}$ 与 Γ 切于点 P, 且它在点 R 处的切线与 Γ 在点 Q 处的切线平行. 将 $\widehat{PQ}$ 替换为 $\widehat{PR}$, 将 Γ 的 QB 部分按 $\overrightarrow{QR}$ 做平移. 对每段半径为 r_1 的弧重复上述操作, 直至将 B 平移至 O_2, 则 $\overrightarrow{O_2B}=\frac{r_1-r_2}{r_1}\sum\overrightarrow{P_iQ_i}$. 类似地, $O_1B=\frac{r_2-r_1}{r_2}\sum\overrightarrow{Q_iP_{i+1}}$ (设 $Q_0=A, P_{n+1}=B$).

将 Γ 上的所有弧从点 X 开始摆放在单位圆上. 最后一条弧的终点为 Y, 且满足 $\widehat{XY}$ 的弧长为 $2(\alpha_1+\alpha_2)$. 设 H 是满足位似比为 $\frac{1}{r_1-r_2}$ 且 $\overrightarrow{O_1O_2}$ 与 $\overrightarrow{XY}$ 为对应向量的位似变换. 将半径为 r_1 的所有弧染红, 再将其余弧染蓝. 考虑每条弧的起点到终点形成的向量(称作该弧的对应向量). 则在位似 H 中, $\overrightarrow{O_2B}$ 与红弧的对应向量(下简称为红/蓝向量)之和对应, 且 $\overrightarrow{BO_1}$ 与蓝向量之和对应. 设 Z 为 $\widehat{XY}$ 上一点, 且满足 $\widehat{XZ}$ 的弧长为 $2\alpha_1$. 则在位似 H 中, W_2 与 W_1 的边界分别与中心分别是 X,Y 且过 Z 的圆对应.

下证当红向量唯一时, O_2B 最长. 设 m 为与单位圆切于点 E 且平行于 O_2B 的切线. 再考虑单位圆上以 M 为中点且长度为 $2\alpha_1$ 的圆弧 T. 若 T 的某端点在红弧上, 将弧分成两部分. 则长为 φ 且在 T 之外的红向量在 m 上的投影长度小于 $\varphi\cos\alpha_1$, 因此所有红向量在 m 上的投影长度小于 T 在 m 上的投影长度. 类似地, 若蓝向量唯一, 则 O_1B 最长. 因此 B 位于 W_1,W_2 的交界中.

显然 W_1 与 W_2 边界的每个交点对应着仅有一条半径为 r_1 与一条半径为 r_2 的弧构成的曲线, 每个 W_1 与 W_2 交界的边界上的点对应着由一条某种半径的弧与两条另一种半径的弧构成的曲线. 下证对于每个在两圆交界内部的点 B, 均对应着由至少四条弧构成, 且起始弧的半径为 r_1 的曲线.

设 D 为 B 在位似 H 中的对应点. 设 $\widehat{XY}$ 上的点 E,F,G 满足 $\overrightarrow{XE}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{XD}$. 设 E,G 分别为 DZ 的垂直平分线与 $\widehat{XZ},\widehat{YZ}$ 的交点, F 为 $\widehat{XY}$ 与过 Z 且平行于 EG 的直线的另一交点. 则四边形 $DEFG$ 为平行四边形, 这正是证明目标的等价形式. 不难发现 E,F,G 由 D 唯一确定. $\square$

评注 本题首先要注意到题目的等价形式, 设法猜出答案, 还要找到合适的方法来说清楚分析过程, 这在短时间内较难做到, 本题是个相当困难的题目.

参考文献

[1] 杨丕业. 2021 俄罗斯沙雷金几何奥林匹克竞赛决赛 [Z/OL]. 微信公众号“偽同文算學”. 2021.8.3