第 18 届沙雷金几何奥林匹克试题与解析

陈昱达[1]　杨皓晨[2]　马飞雁[3]　甘润知[2]　王滋乐[4]

(1. 天津市新华中学, 300204;　2. 北京大学, 100091;

3. 清华大学, 100084;　4. 江苏省天一中学, 214101)

1. 前言与致谢

第 18 届沙雷金 (Sharygin) 几何奥林匹克在俄罗斯莫斯科州的杜布纳举行. 决赛于 2021 年 7 月 31 日至 2021 年 8 月 1 日举行, 每一天考试时间都为 4 小时 (10:00-14:00), 每一天考试有 4 道题, 参赛选手分为 8, 9, 10 三个年级组.

下面我们给出决赛的解答与评析, 解答人姓名随解答给出. 同时感谢来自龙崎钢老师和赵力老师, 对试题进行了翻译[1,2], 感谢杨丕业老师在我们撰写解答时提供宝贵的建议.

2. 试 题

一、八年级组

8-1. 凸四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 2\angle BCD$, $AB = AD$. 点 P 满足四边形 $ABCP$ 为平行四边形. 求证: $CP = DP$.

8-2. 直角梯形 $ABCD$ 中, M 为斜腰 CD 的中点. ω_1 和 ω_2 分别为 $\triangle BCM$ 和 $\triangle AMD$ 的外接圆, 两圆的另一交点为 E. 设 ED 交 ω_1 于 F, FB 交 AD 于 G. 求证: GM 平分 $\angle BGD$.

8-3. 给定圆 ω 和点 P (P 不在圆上). 正 $\triangle ABC$ 内接于 ω, 设 A', B', C' 分别为 P 关于 BC, CA, AB 的投影. 求 $\triangle A'B'C'$ 的重心轨迹(随着 $\triangle ABC$ 的旋转).

8-4. 圆内接四边形 $ABCD$ 中, O 是其外接圆圆心, P 是其对角线的交点,

修订日期: **2022-12-28.**

M, N 分别为 AB 和 CD 的中点. $\odot(OPM)$ 与线段 AP 和 BP 分别再次交于 A_1 和 B_1, $\odot(OPN)$ 与线段 CP 和 DP 分别再次交于 C_1 和 D_1. 求证: 四边形 AA_1B_1B 和 CC_1D_1D 的面积相等.

8-5. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆与 AB, BC, AC 分别切于 C_1, A_1, B_1. 设 A' 为 A_1 关于 B_1C_1 的对称点; 类似定义 C'. 直线 $A'C_1$ 与 $C'A_1$ 交于点 D. 求证: $BD \parallel AC$.

8-6. 给定交于 A, B 的两圆以及圆外一点 O. 一条以 O 为原点的射线与第一个圆的交点(之一)和第二个圆的交点(之一)分别为 C, D. 以尺规作图的方式作出当 $OC : OD$ 取得最大值时的这条射线.

8-7. 平面上有 10 个点, 任意 4 个点都位于某个正方形的边界上, 则是否这 10 个点均位于某个正方形的边界?

8-8. 给定等腰梯形 $ABCD(AB = CD)$. 其外接圆上有一点 P, CP 与 AD 交于点 Q. 设 L 为 QD 的中点. 求证: 梯形对角线的长度不大于两腰中点到直线 PL 上任意一点的距离之和.

二、九年级组

9-1. 设 BH 为 $\mathrm{Rt}\,\triangle ABC\,(\angle B = 90°)$ 的高. $\triangle ABH$ 与顶点 B 对应的旁切圆与直线 AB 相切于点 A_1 ; 类似定义点 C_1. 求证: $AC \parallel A_1C_1$.

9-2. 圆 s_1 与 s_2 相交于点 A 和 B. 考虑所有经过点 A 且与上述两圆分别再次相交于点 P_1 和 P_2 的所有直线. 利用尺规作图, 做出其中的一条直线, 使得 $AP_1 \cdot AP_2$ 取得最大值.

9-3. 在 $\triangle ABC$ 中平行于边 AC 的中位线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 X 和 Y. 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, D 为 $\triangle ABC$ 外接圆上 $\overset{\frown}{AC}$ (不含点 B) 的中点. 点 L 位于线段 DI 上, 且满足 $DL = \frac{BI}{2}$. 求证: $\angle IXL = \angle IYL$.

9-4. 等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, P 为 $\triangle ABC$ 外接圆劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点, Q 为 AC 的中点. $\triangle APQ$ 的外接圆圆心为 O, 此圆再次交 AB 于点 K. 求证: 直线 PO 与 KQ 的交点位于 $\angle ABC$ 的平分线上.

9-5. 圆 ω 的弦 AB 和 CD 相交于点 E, 且满足 $AD = AE = EB$. 线段 CE 上的点 F 满足 $ED = CF$. $\angle AFC$ 的平分线交 $\overset{\frown}{DAC}$ 于点 P. 求证: A, E, F, P 四点共圆.

9-6. 梯形 $ABCD(AD > BC)$ 的两腰 AB 与 CD 相交于点 P. 点 Q 在线段

AD 上, 且满足 $BQ=CQ$. 求证: $\triangle AQC$ 和 $\triangle BQD$ 外接圆圆心的连线垂直于 PQ.

9-7. 设 H 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心. $\triangle AHC$ 的外接圆与 AB, BC 分别交于点 P, Q. 直线 PQ 与 AC 的交点为 R. 点 K 位于直线 PH 上, 且满足 $\angle KAC=90°$. 求证: KR 与 $\triangle ABC$ 的某一条中线相垂直.

9-8. 平面上有若干个圆, 将它们相互之间的交点或切点标记出来. 是否可能每个圆恰含有 5 个被标记的点, 且每个被标记的点恰属于 5 个圆?

三、十年级组

10-1. 设 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 分别为两个正方形, 顶点按顺时针方向排列. 线段 $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ 的垂直平分线分别与线段 A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_1B_1 的垂直平分线交于点 P, Q, R, S. 求证: $PR \perp QS$.

10-2. 凸四边形 $ABCD$ 中, $\odot(ABC)$ 与 $\odot(ACD)$ 的外公切线交于点 E, $\odot(ABD)$ 与 $\odot(BCD)$ 的外公切线交于点 F, 且 F 在 AC 上. 求证: E 在 BD 上.

10-3. 直线 ℓ 与线段 AB 交于点 C. 点 X 在直线 ℓ 上, 且满足 $\angle AXC$ 恰为 $\angle BXC$ 的两倍或者一半. 求满足条件的点 X 的个数.

10-4. 凸四边形 $ABCD$ 中, $\angle B=\angle D$. 求证: BD 的中点在 $\triangle ABC$ 内切圆与 $\triangle ACD$ 内切圆的内公切线上.

10-5. 过点 A 作圆 Ω 的两条切线, 切点分别为 B, C. 设 M 为 BC 中点, P 为线段 BC 上任意一点. 直线 AP 与 Ω 交于点 D, E. 求证: $\odot(MDP)$ 与 $\odot(MEP)$ 的两条外公切线的交点在 $\triangle ABC$ 的中位线上.

10-6. 设 O, I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和内心, P 为线段 OI 上任意一点, 直线 PA, PB, PC 分别与 $\triangle ABC$ 的外接圆再次相交于点 P_A, P_B, P_C. 求证: $\angle BP_AC, \angle CP_BA, \angle AP_C$ 的角平分线交于直线 OI 上的一点.

10-7. 平面上有若干个圆, 将它们相互之间的交点或切点标记出来. 是否可能每个圆恰含有 4 个被标记的点, 且每个被标记的点恰属于 4 个圆?

10-8. 设 $ABCA'B'C'$ 为一个中心对称的八面体.其中 A 与 A' 相对, B 与 B' 相对, C 与 C' 相对.且对任意一个顶点, 其所在的四个平面角度数之和为 $240°$. 记 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'BC$ 的 Torricelli 点分别为 T_1, T_2. 求证: T_1, T_2 到 BC 的距离相等.

3. 解答与评注

题 8-1. 凸四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 2\angle BCD$, $AB = AD$. 点 P 满足四边形 $ABCP$ 为平行四边形. 求证: $CP = DP$.

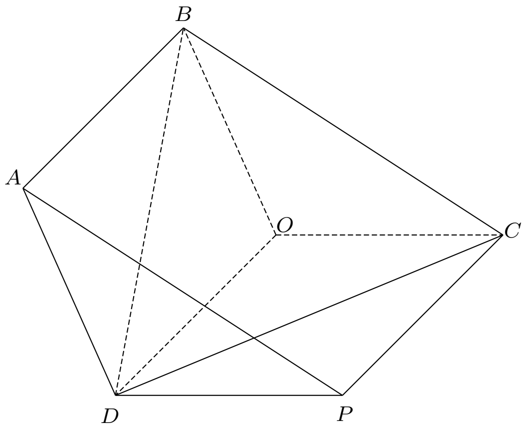

图 8-1

证明 (马飞雁)

取 $\triangle BCD$ 的外心为 O, 于是有 $OB = OD, AB = AD$. 由

$$\angle DBO = 90^\circ - \angle BCD = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAD = \angle ABD,$$

可知四边形 $ABOD$ 为菱形.

故有 $CP = AB = OD$, 且

$$\begin{aligned}\angle DCP &= 180^\circ - \angle ABC - \angle BCD \\ &= 180^\circ - (\angle ABD + \angle BCD) - \angle DBC \\ &= 90^\circ - \angle DBC = \angle ODC.\end{aligned}$$

于是 OD, CP 互相平行且相等, 则四边形 $OCPD$ 为平行四边形, 有 $CP = OD = OC = DP$. 得证. □

评注 题目中的二倍角条件几乎明示了作圆心, 连出辅助线后即得解.

题 8-2. 直角梯形 $ABCD$ 中, M 为斜腰 CD 的中点. ω_1 和 ω_2 分别为 $\triangle BCM$ 和 $\triangle AMD$ 的外接圆, 两圆的另一交点为 E. 设 ED 交 ω_1 于 F, FB 交 AD 于 G. 求证: GM 平分 $\angle BGD$.

证明 (马飞雁) 取 ω_1 与 AB 的交点为 E'. 有

$$\angle CME' = \angle CBE' = \angle ME'A = 90^\circ.$$

可知 M, E', A, D 四点共圆, ω_1 与 ω_2 的交点 E 与 E' 重合, 在 AB 上.

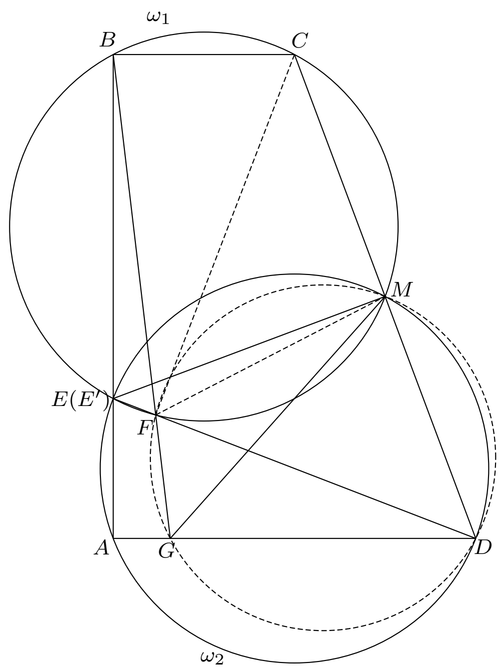

图 8-2

故 $\angle CFD = \angle CBE = 90°$, M 为斜边 CD 中点, 即 $MF = MD = CM$. 又注意到 $\angle AGB = \angle CBF = \angle FMD$, 即得 M, F, G, D 四点共圆, 则 $\angle BGM = \angle MDF = \angle MFD = \angle MGD$, 得证. □

评注 作图准确的话可以很快得到 E 在线段 AB 上的结论, 倒角即得解.

题 8-3. 给定圆 ω 和点 P (P 不在圆上). 正 $\triangle ABC$ 内接于 ω, 设 A', B', C' 分别为 P 关于 BC, CA, AB 的投影. 求 $\triangle A'B'C'$ 的重心轨迹(随着 $\triangle ABC$ 的旋转).

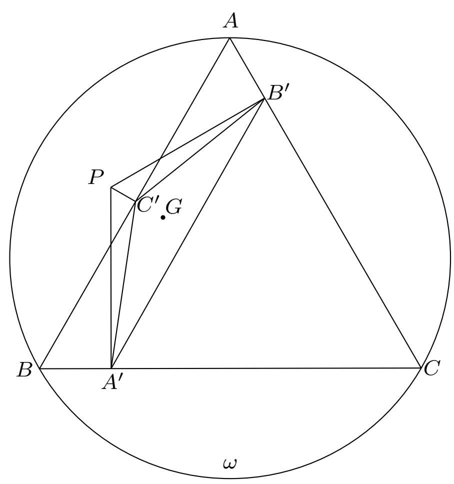

图 8-3

解 (陈昱达) 以 ω 为单位圆, 其圆心为原点建立复平面. 记 $\varepsilon = \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 则

$B=\varepsilon A, C=\varepsilon^2 A$,

$$A'=\frac{B+C+P-BC\overline{P}}{2}=\frac{\varepsilon A+\varepsilon^2 A+P-A^2\overline{P}}{2}.$$

同理有

$$B'=\frac{\varepsilon^2 A+A+P-\varepsilon^2 A^2\overline{P}}{2}, C=\frac{A+\varepsilon A+P-\varepsilon A^2\overline{P}}{2}.$$

因此 $\triangle A'B'C'$ 的重心

$$G=\frac{A'+B'+C'}{3}=\frac{3P}{6}=\frac{P}{2}.$$

故 $\triangle A'B'C'$ 的重心恒为 ω 的圆心与 P 的中点. □

评注 本题难度不高, 采用几何法也并不困难. 但注意到本题图形简洁, 且每个点均容易表示, 故采用复数法处理本题更为简洁和快速.

题 8-4. 圆内接四边形 $ABCD$ 中, O 是其外接圆圆心, P 是其对角线的交点, M, N 分别为 AB 和 CD 的中点. $\odot(OPM)$ 与线段 AP 和 BP 分别再次交于 A_1 和 B_1, $\odot(OPN)$ 与线段 CP 和 DP 分别再次交于 C_1 和 D_1. 求证: 四边形 AA_1B_1B 和 CC_1D_1D 的面积相等.

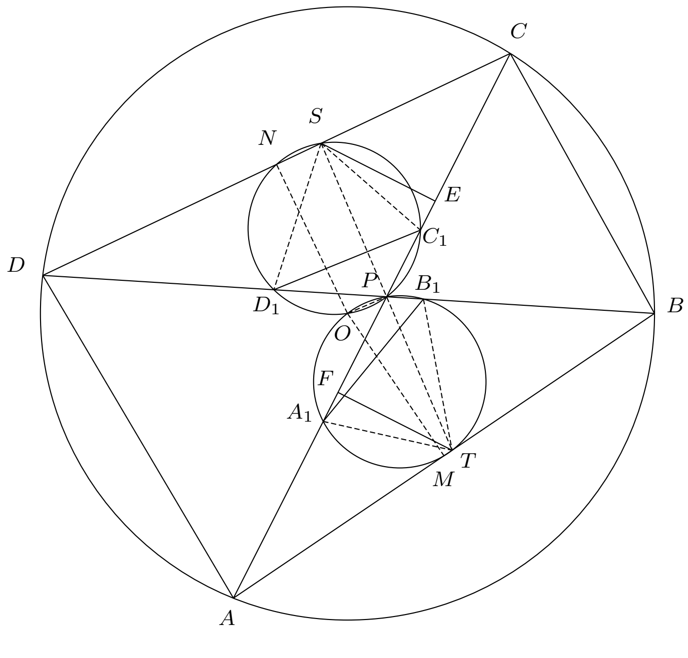

图 8-4

证明 (马飞雁) 取 $\odot(OPN)$ 和 CD 的另一交点为 S, $\odot(OPM)$ 和 AB 的另一交点为 T.

联结 $SC_1, SD_1, B_1T, A_1T, SP, PT, ON, OM$. 由

$$\angle SPO=\angle OND=\angle OMA=\angle OPT=90^\circ$$

知 S,P,T 三点共线.

考虑到 $\triangle PDC$ 和 $\triangle PAB$ 为相似三角形, 其顶点与中点连线 PN,PM、对应边的中垂线 ON,OM 的夹角对应地相等. 即 $\angle OSP=\angle ONP=\angle OMP=\angle OTP$, 也即 $\odot(OPN)$ 和 $\odot(OPM)$ 的半径相等. 由此可知

$$SP=PT,SD_1=B_1T,SC_1=A_1T,A_1B_1=C_1D_1.$$

故 $\triangle SD_1C_1\cong\triangle TB_1A_1$.

考虑到 $\angle OC_1P=\angle OA_1P$, 从而有 $OC_1=OA_1$. 同时 $OC=OA$, 得到 $C_1C=A_1A$. 同理也有 $B_1B=D_1D$.

过 T 作 $TF\perp CA$, 过 S 作 $SE\perp CA$. 由 $SP=PT$ 可知 $TF=SE$, 结合 $C_1C=A_1A$ 可知 $\triangle AA_1T$ 和 $\triangle CC_1S$ 面积相等, 同理 $\triangle BB_1T$ 和 $\triangle DD_1S$ 面积相等.

结合 $\triangle SD_1C_1\cong\triangle TB_1A_1$ 可知, 四边形 AA_1B_1B 与 CC_1D_1D 面积相等, 得证. □

评注 本题大量运用了对称性, 需要一定的几何直觉. 作图准确的话不难发现两圆半径相等, 从而迎刃而解.

题 8-5. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆与 AB,BC,AC 分别切于 C_1,A_1,B_1. 设 A' 为 A_1 关于 B_1C_1 的对称点; 类似定义 C'. 直线 $A'C_1$ 与 $C'A_1$ 交于点 D. 求证: $BD\parallel AC$.

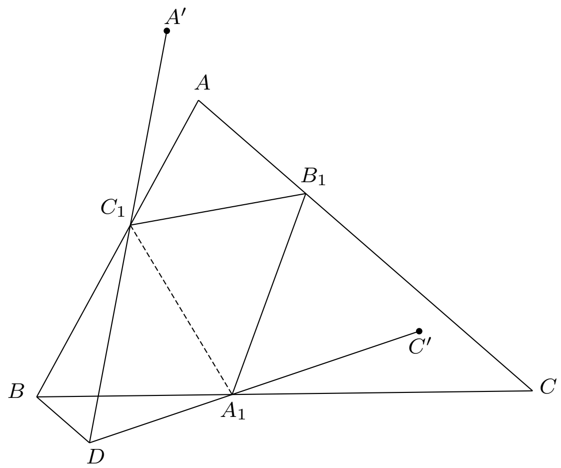

图 8-5

证明 **(王滋乐)** 首先不难得到

$$\angle BA_1C_1=90^\circ-\frac{\angle ABC}{2},\angle CA_1B_1=90^\circ-\frac{\angle C}{2},\angle C_1A_1B=90^\circ-\frac{\angle A}{2},$$

则

$$\angle A'C_1B_1=\angle A_1C_1B_1=90^\circ-\frac{\angle C}{2},\angle AB_1C_1=90^\circ-\frac{\angle A}{2},$$

且 $A'C_1$ 和 AC 的夹角为 $90^\circ-\frac{\angle ABC}{2}=\angle C_1A_1B$, 因此只需证明 B,D,A_1,C_1 共圆.

由

$$\begin{aligned}\angle BC_1D=\angle A'C_1A&=\angle A_1C_1B_1-\angle AC_1B_1\\&=\left(90^\circ-\frac{\angle C}{2}\right)-\left(90^\circ-\frac{\angle A}{2}\right)\\&=\frac{\angle A}{2}-\frac{\angle C}{2}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\angle BA_1D=\angle C'A_1C&=\angle CA_1B_1-\angle B_1A_1C_1\\&=\left(90^\circ-\frac{\angle C}{2}\right)-\left(90^\circ-\frac{\angle A}{2}\right)\\&=\frac{\angle A}{2}-\frac{\angle C}{2}\end{aligned}$$

可知 $\angle BC_1D=\angle BA_1D$, 故 B,D,A_1,C_1 共圆. □

评注 本题较为容易, 题中有大量的轴对称, 只需对角进行计算即可.

题 8-6. 给定交于 A,B 的两圆以及圆外一点 O. 一条以 O 为原点的射线与第一个圆的交点(之一)和第二个圆的交点(之一)分别为 C,D. 以尺规作图的方式作出当 $OC:OD$ 取得最大值时的这条射线.

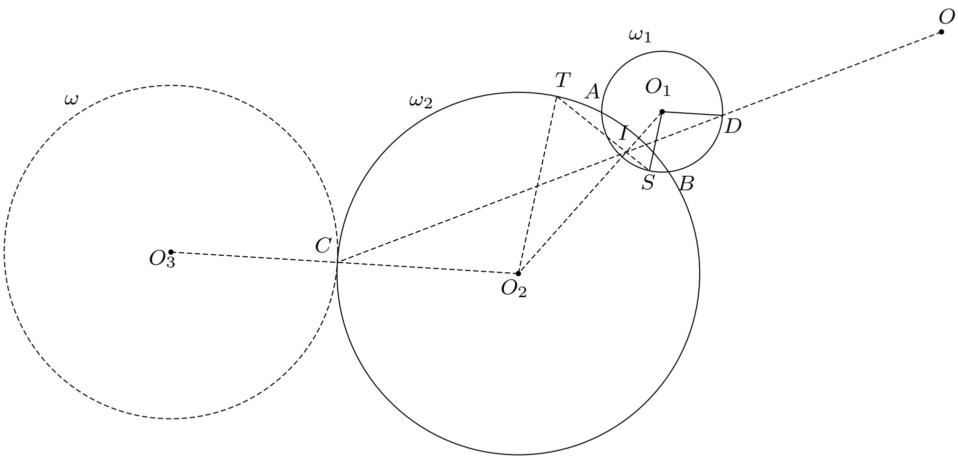

图 8-6

解 (马飞雁) 首先给出作图方式: 记两圆分别为 ω_1,ω_2. 联结两圆的圆心 O_1,O_2, 任取 ω_2 上的点 T 并联结 O_2T, 作 $O_1S\parallel O_2T$ 交 ω_1 于 S (满足 $\overrightarrow{O_1S}$ 与

$\overrightarrow{O_2T}$ 方向相反). 取 ST 与 O_1O_2 的交点为 I. 作射线 OI 分别交 ω_1,ω_2 于 D,C, 此即为 $OC:OD$ 取最大值的情形, 下面证明该结论.

以 O 点为位似中心, $OC:OD$ 为比作 ω_1 的位似圆 ω, 易知 ω 过点 C. 当 $OC:OD$ 取最大值时, 以 O 点为位似中心, 系数 $k>OC:OD$ 为比例作 ω_1 的位似圆 ω' 与 ω_2 无交点. 因此 ω 和 ω_2 相切于 C 点. 取 ω 圆心为 O_3, 有 O_2,C,O_3 共线, 且 $O_2O_3 \parallel O_1D$. 故射线 ODC 与线段 O_1O_2 交于 ω_1,ω_2 的内位似中心, 即为上述作出的 I, 得证. □

评注 尺规作图题中常见的利用位似性质的题目, 非常精妙.

题 8-7. 平面上有 10 个点, 任意 4 个点都位于某个正方形的边界上, 则是否这 10 个点均位于某个正方形的边界?

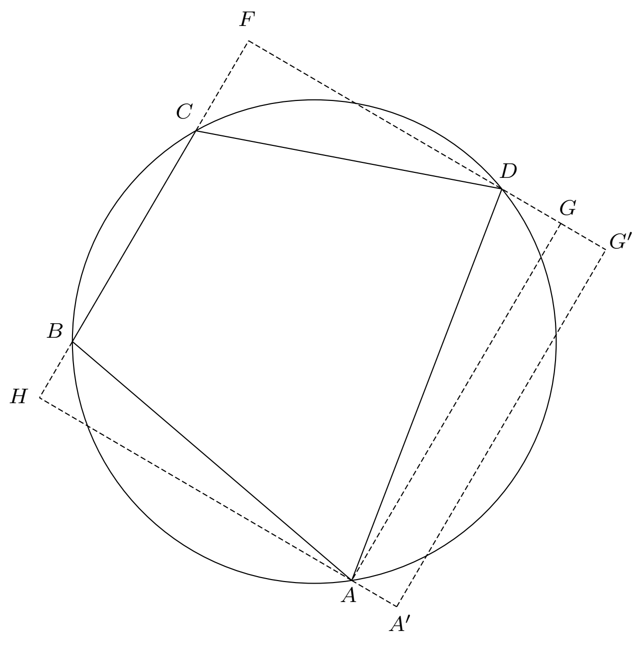

图 8-7

解 (马飞雁) 首先证明下面的引理.

引理 对于共圆的四个点, 它们一定位于某个正方形上.

证明 不妨设共圆的四点为 A,B,C,D. 其中, 四边形 $ABCD$ 有至少两个角不是锐角, 记为 $\angle B,\angle C$. 两边延长 BC, 过 A,D 分别作 BC 的垂线 AH,DF. 不妨设 $AH\ge DF$, 过 A 在 FD 的延长线上作垂线 AG. 从而四点 A,B,C,D 位于长方形 $HFGA$ 上. 若 $HFGA$ 为正方形则引理已得证.

当 $HF>FG$ 时, 分别延长 HA,FG 至 A',G', 使得 $HA'G'F$ 为正方形, A,B,C,D 在其上; 当 $HF<FG$ 时, 同理分别延长 HF,GA 至 H',A' 即可. 引理得证.

下面举出原命题的反例. 取一个圆内接十边形的顶点, 则它们不可能在同一个正方形上, 这是因为一个正方形和圆最多有 8 个交点; 同时, 这 10 个点中的任意 4 个共圆, 由引理知也即位于某一个正方形上. 故原命题不一定成立. □

评注 本题的举例非常巧妙, 笔者写作过程中的最大困难在于判断命题的对错, 因此走了一段弯路.

题 8-8. 给定等腰梯形 $ABCD(AB = CD)$. 其外接圆上有一点 P, CP 与 AD 交于点 Q. 设 L 为 QD 的中点. 求证: 梯形对角线的长度不大于两腰中点到直线 PL 上任意一点的距离之和.

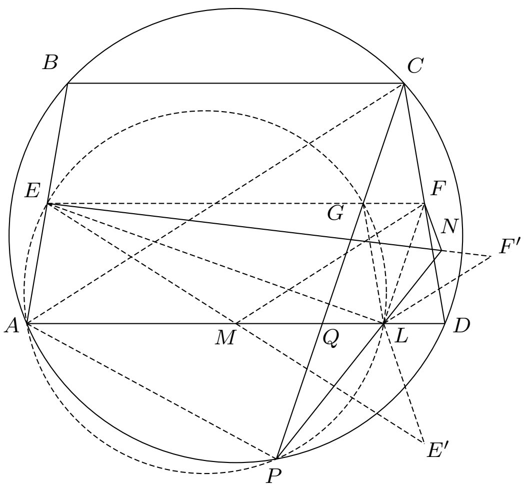

图 8-8

证明 (陈昱达) 不妨设 AD 为下底, 记 AB, CD, AD 的中点分别为 E, F, M. 设 E 关于 M 的对称点为 E', F 关于 PL 的对称点为 F'. 则只需证明 $EF' \geq AC$. 下证 $EF' = AC$.

首先由对称性可知 $\triangle MLF \cong \triangle MLE'$. 故有 $LE' = LF = LF'$. 设 EF' 交 PL 于 N, EF 交 CQ 于 G, 显然 G 是 CQ 中点, 故有 $\angle GLA = \angle CDA = \angle CPA$, 则 G, L, P, A 共圆. 又可知 $EGLA$ 也是等腰梯形, 故 E, G, L, P, A 五点共圆, 则 $\angle NLF = \angle GPL = \angle ELA$. 这表明

$$\angle ELE' = \angle MLE' + \angle ELM = \angle MLF + \angle FLG = \angle MLN = \angle ELF'.$$

故可得 $\triangle ELE' \cong \triangle ELF'$. 则 $EF' = EE' = 2EM = AC$. □

评注 本题的关键在于观察出 $\triangle ELE' \cong \triangle ELF'$ 这一组全等三角形, 从而实现对 EF' 的转化. 且本题采用三角计算或复数计算均较为困难, 因此如果思路方向错误, 处理起来是十分棘手的.

题 9-1. 设 BH 为 $\mathrm{Rt}\triangle ABC\,(\angle B=90^\circ)$ 的高. $\triangle ABH$ 与顶点 B 对应的旁切圆与直线 AB 相切于点 A_1 ; 类似定义点 C_1. 求证: $AC \parallel A_1C_1$.

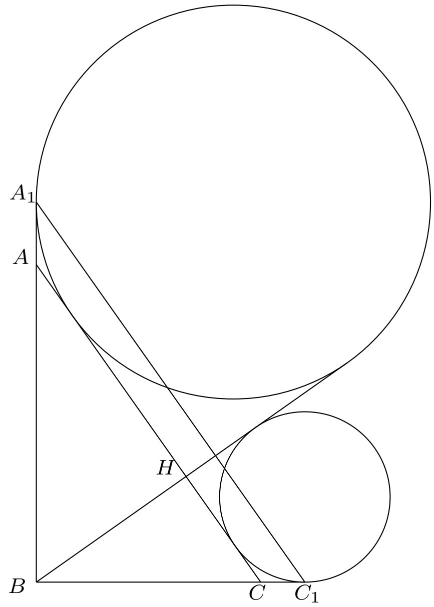

图 9-1

证明 (马飞雁) 显然,

$$BC_1=\frac{1}{2}(BH+HC+CB), BA_1=\frac{1}{2}(BA+AH+BH).$$

于是

$$\frac{BC_1}{BA_1}=\frac{BH+HC+CB}{BA+AH+BH}=\frac{BC}{BA}.$$

从而 $AC \parallel A_1C_1$, 得证. □

评注 非常基础的题目, 熟知切点关于长度的结论即可.

题 9-2. 圆 s_1 与 s_2 相交于点 A 和 B. 考虑所有经过点 A 且与上述两圆分别再次相交于点 P_1 和 P_2 的所有直线. 利用尺规作图, 做出其中的一条直线, 使得 $AP_1\cdot AP_2$ 取得最大值.

解 (陈昱达) 先证明下面几个引理.

引理 1 给定一条直线和直线外一点, 可用尺规作图的方式, 过该点作出该直线的平行线.

该引理是熟知的.

引理 2 给定 $\angle ABC$ 以及边 DE, 可用尺规作图的方式, 作出满足 $\angle DEF=\angle ABC$ 的边 EF.

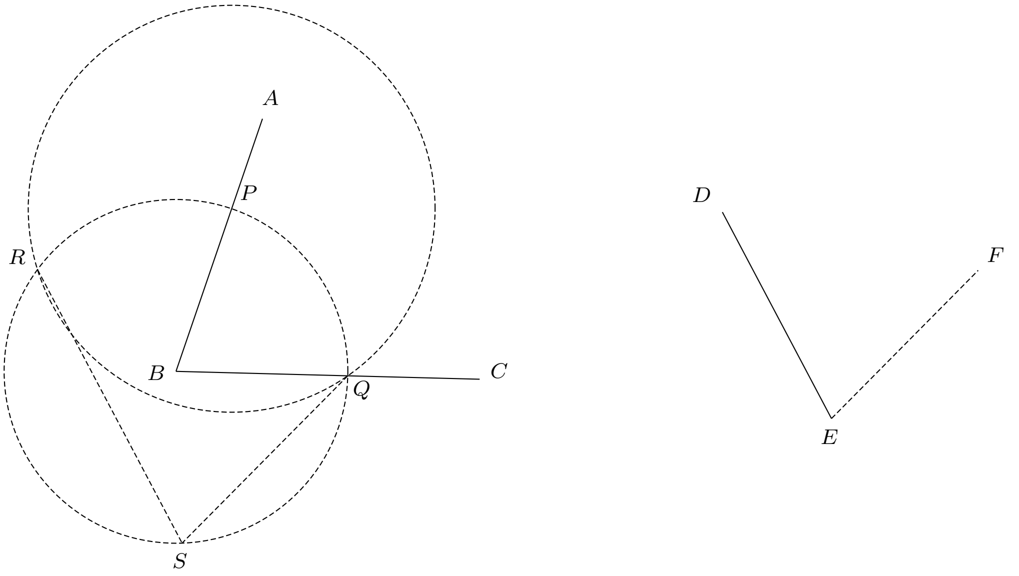

图 9-2. 1

证明　下给出以 ED 为终边的作图方法, EF 为始边时作法类似.

首先以 B 为圆心作圆, 与射线 BA, BC 分别交于 P, Q. 再以 P 为圆心, PQ 为半径作圆, 与 $\odot B$ 再次交于 R. 过 R 作 DE 的平行线, 再次交 $\odot B$ 于 S. 作 $EF \parallel SQ$ 即可.

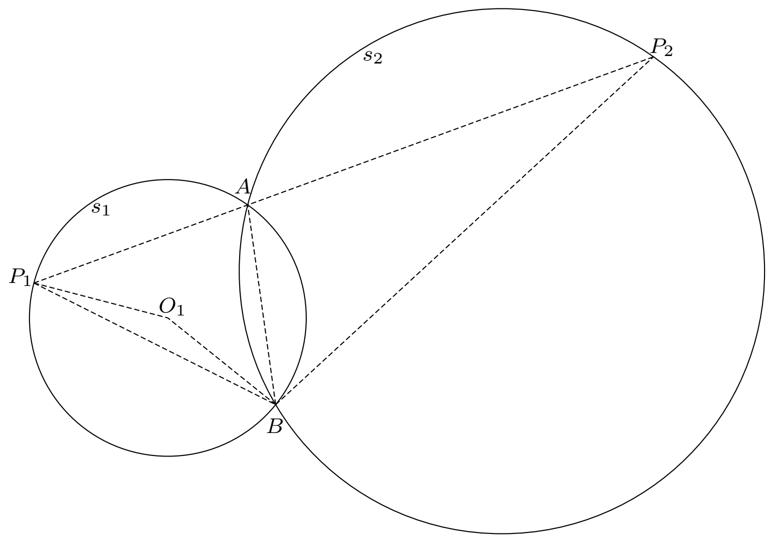

图 9-2. 2

回到原题, 记 s_1 的圆心为 O_1, 弦 AB 在 s_1, s_2 所对的圆周角分别为 α, β. 再设 P_1P_2 与 AB 的夹角为 θ. 简记 s_1, s_2 的半径分别为 R_1, R_2 (易知它们均为定值). 则

$$\begin{aligned} AP_1 \cdot AP_2 &= 2R_1 \sin(\alpha + \theta) \cdot 2R_2 \sin(\theta - \beta) \\ &= 2R_1R_2(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta + 2\theta)) \end{aligned}$$

$$= 2R_1R_2(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\pi-\alpha+\beta-2\theta)),$$

当 $\pi-\alpha+\beta-2\theta=0$ 时上式最大, 即 $2\theta=\pi-\alpha+\beta$ (事实上此时有 BA 平分 $\angle P_1BP_2$). 只需作 $\angle BO_1P_1=\pi-\alpha+\beta$ 即可, 由引理 2, 这是可以达到的. 再作直线 P_1A, 与 s_2 交于 P_2 即可. □

评注 处理本题时不难联想到三角函数, 只需要找到合适的角度(或线段)作为变量, 即可将 $AP_1\cdot AP_2$ 转化为单变量函数. 找到取得最大值时的条件后, 作图的步骤并不困难.

题 9-3. 在 $\triangle ABC$ 中平行于边 AC 的中位线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 X 和 Y. 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, D 为 $\triangle ABC$ 外接圆上 $\overset{\frown}{AC}$ (不含点 B) 的中点. 点 L 位于线段 DI 上, 且满足 $DL=\frac{BI}{2}$. 求证: $\angle IXL=\angle IYL$.

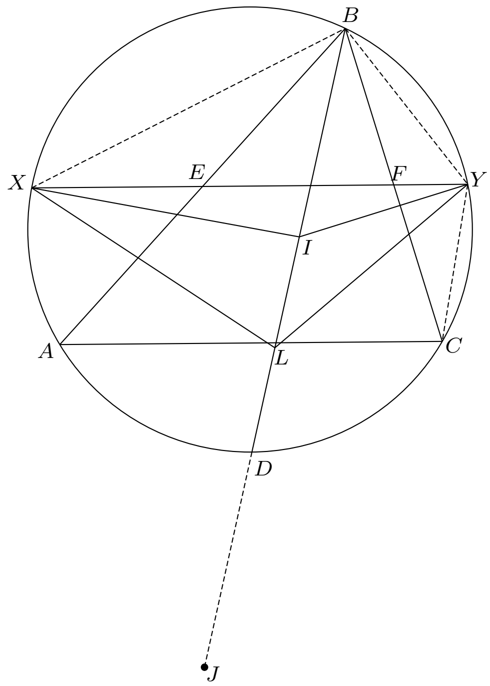

图 9-3

证明 (陈昱达)

由 $XY\parallel AC$ 可知 $\overset{\frown}{AX}=\overset{\frown}{CY}$, 故 $\angle ABX=\angle CBY$. 又 $\angle BXY=\angle BCY$, 故 $\triangle BXE\sim\triangle BCY$. 则有 $BX\cdot BY=\frac{BA\cdot BC}{2}$.

设 J 为 $\angle B$ 内的旁心, 则由内心与旁心的性质 $BA\cdot BC=BI\cdot BJ$, 再结合 $BL=BI+ID-DL=\frac{BI}{2}+\frac{IJ}{2}=\frac{BJ}{2}$ 可知 $BX\cdot BY=BI\cdot BL$. 故有 $\triangle BXL\sim\triangle BIY, \triangle BXI\sim\triangle BLY$. 因此有

$$\angle IXL=\angle BXL-\angle BXI=\angle BIY-\angle BLY=\angle IYL.$$ □

评注 本题中, 考虑如何利用 $DL = \frac{BI}{2}$ 是解决问题的关键. 如果采用计算的方法, 可能会难处理得多. 虽然本题的过程并不长, 但笔者认为这并不是一道十分容易的题目.

题 9-4. 等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC, P$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆劣弧 $\widehat{AB}$ 的中点, Q 为 AC 的中点. $\triangle APQ$ 的外接圆圆心为 O, 此圆再次交 AB 于点 K. 求证: 直线 PO 与 KQ 的交点位于 $\angle ABC$ 的平分线上.

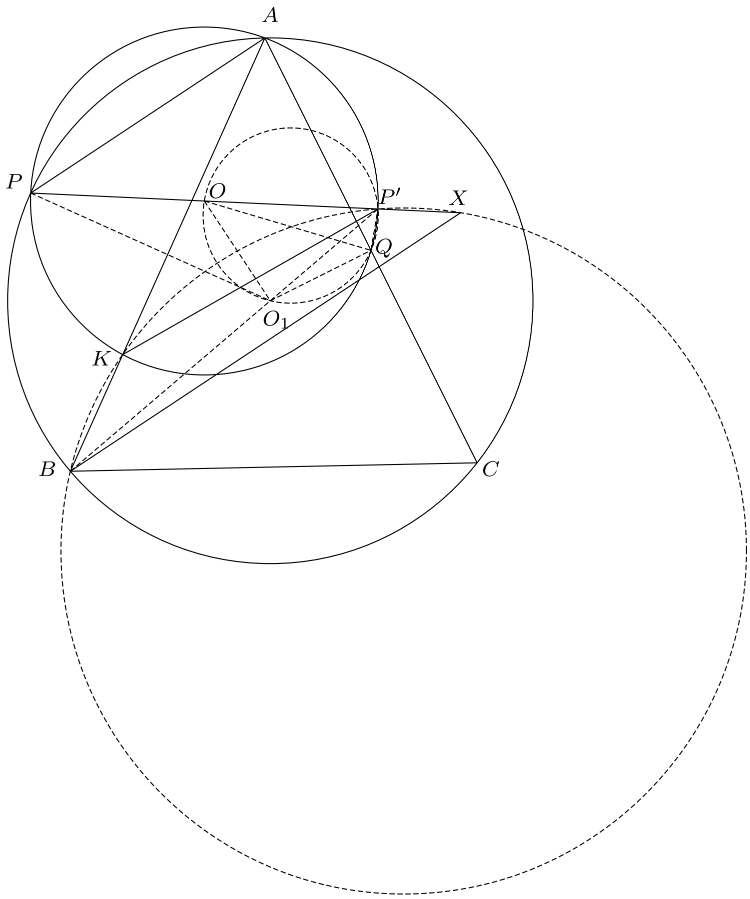

图 9-4

证明 (甘润知) 首先给出一个断言.

断言 如果三角形 ABC 的外心是 O_1, P 关于 O 的对称点为 P' 那么 B, O_1, P' 三点共线.

证明 注意到连心线垂直平分公共弦, 那么 $OO_1 \perp AP$, 又 Q 是中点, 因此 $O_1Q \perp AC$, 因此得到

$$\angle OO_1Q = \pi - \angle PAQ = \pi - \angle PP'Q = \pi - \angle OP'Q,$$

从而 O, O_1, P', Q 四点共圆, 因此

$$\angle OO_1P' = \angle OQP' = \angle OP'Q = \angle PP'Q = \angle PAC = \angle A + \frac{1}{2}\angle C.$$

注意到 $\angle BO_1O=\angle BO_1P+\angle OO_1P=\angle C+\dfrac{1}{2}\angle C$, 因此

$$\angle BO_1O+\angle OO_1P=\pi,$$

从而得到 B,O_1,P' 三点共线. 断言得证.

回到原题, 设 PO 与 KQ 交点为 X. 注意到

$$\angle ABP'=\angle ABO_1=\frac{\pi}{2}-\angle C,$$

又由 P 是弧 $\widehat{AB}$ 中点,

$$\angle X=\angle KP'P-\angle P'KQ=\frac{1}{2}\angle C-\frac{\pi}{2}+\angle PAC=\frac{\pi}{2}-\angle C,$$

从而 $\angle ABP'=\angle X$, 即 B,K,P',X 共圆, 从而

$$\angle ABX=\angle PP'K=\angle PAB=\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{2}\angle B.$$

至此, 完成了命题的证明. □

评注 本题是中等偏难的问题. 本题中的点 Q 一下子难以发觉其用法, 但可以通过结论反推出 B,K,P',X 共圆的条件, 进一步会发觉只需要证明断言内容即可. 通过点出圆心, 构造共圆, 便可以充分利用边中点、弧中点的条件, 同时也可以给出本题断言的一个较为简洁易懂的证明.

题 9-5. 圆 ω 的弦 AB 和 CD 相交于点 E, 且满足 $AD=AE=EB$. 线段 CE 上的点 F 满足 $ED=CF$. $\angle AFC$ 的平分线交 $\widehat{DAC}$ 于点 P. 求证: A,E,F,P 四点共圆.

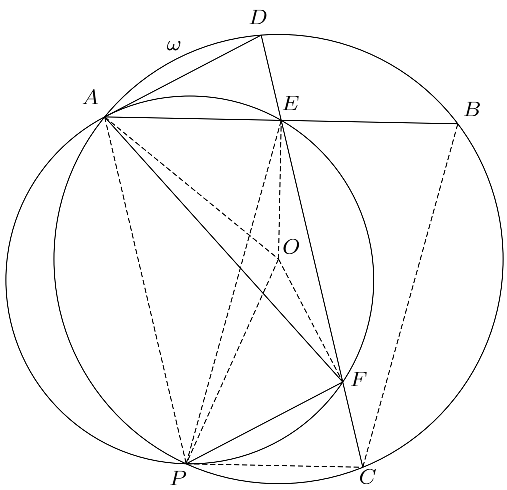

图 9-5

证明 (王滋乐) 由 $\angle BEC=\angle DEA=\angle ADE=\angle ABC$ 可知 $CE=BC=DF$, 再由 $AD=BE,DF=BC,\angle ADF=\angle EBC$ 可知 $\triangle ADF\cong\triangle EBC$, 故

$AF = EC = DF = BC$, 即有 $\angle PFA = \angle PFC = \angle FAD = \angle FDA$, 则 $PF \parallel AD$.

又 $FA = FD, OA = OD$, 则 $OF \perp AD$, 即 OF 平分 $\angle AFD$, 故 $OF \perp PF$, $\angle OFP = \angle OEA = 90°$. 由 $DE = CF$ 可知 $OE = OF$, 结合 $OP = OA$ 可得 $\triangle OFP \cong \triangle OEA$, 故 $PF = AE = AD$. 这表明四边形 $ADFP$ 为平行四边形, 即 $AP \parallel DF, AP = DF$, 故 $AP \parallel EC, AP = EC$, 则四边形 $APCE$ 为平行四边形.

由于 E 为 AB 中点, 故 $EP = EC$ ($APCB$ 为等腰梯形), 故 $EP = EC = CB = PA$, 则

$$\angle PEA = \angle PAE = \angle CBE = \angle ADC = \angle AFP = \angle PFC,$$

即 A, E, F, P 共圆. $\square$

评注 本题中线段相等较多, 由此产生了很多全等三角形以及平行四边形. 利用这些图形进行倒角, 则可以顺利解决本题.

题 9-6. 梯形 $ABCD(AD > BC)$ 的两腰 AB 与 CD 相交于点 P. 点 Q 在线段 AD 上, 且满足 $BQ = CQ$. 求证: $\triangle AQC$ 和 $\triangle BQD$ 外接圆圆心的连线垂直于 PQ.

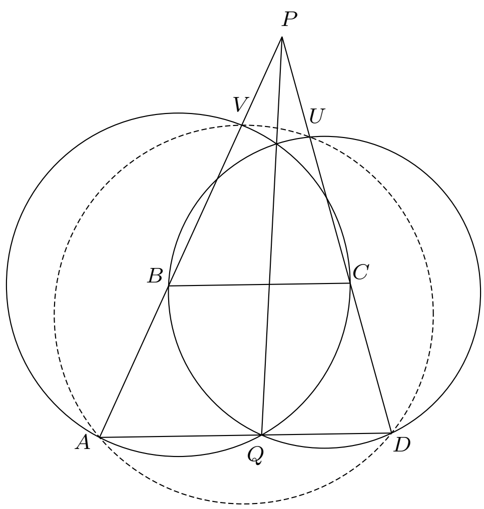

图 9-6

证明 (甘润知) 设 $\odot(AQC)$ 交线段 PD 于 U, $\odot(BQD)$ 交线段 PA 于 V. 注意到 $BC \parallel AD$, 那么

$$\angle AUC = \angle CQD = \angle QCB = \angle QBC = \angle BQA = \angle BVD$$

因此 A, V, U, D 四点共圆, 从而由根心定理知 P 在这 $\odot(AQC)$ 和 $\odot(BQD)$ 的根

轴上, 即 $PQ \perp$ 这两个圆的连心线. $\square$

评注 较为常规的一个几何题. 问题中的连心线已经给出足够的提示: 这个题必须考虑根轴, 接下来就去证明 P 在根轴上即可, 属于简单题.

题 9-7. 设 H 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心. $\triangle AHC$ 的外接圆与 AB, BC 分别交于点 P, Q. 直线 PQ 与 AC 的交点为 R. 点 K 位于直线 PH 上, 且满足 $\angle KAC = 90°$. 求证: KR 与 $\triangle ABC$ 的某一条中线相垂直.

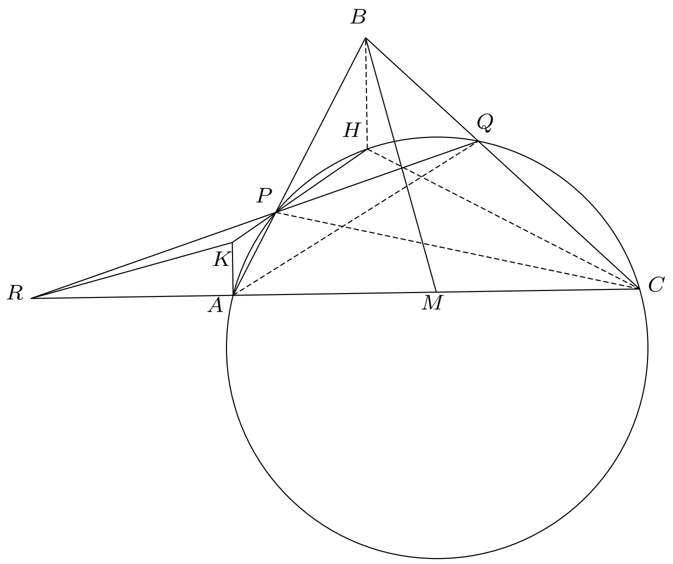

图 9-7

证明 (王滋乐) 下简记 $\angle CAB = \angle A, \angle ABC = \angle B, \angle BCA = \angle C$. 设 AC 中点为 M. 下证 $KR \perp BM$, 即 $\angle RKA = \angle BMR$.

首先有

$$\angle KPA = \angle HPB = \angle HCA = 90° - \angle A,$$

$$\angle KPR = \angle HPQ = \angle C - \angle HPB = \angle C + \angle A - 90° = 90° - \angle B,$$

$$\angle KAP = 90° - A, \angle PRA = \angle A - \angle C.$$

下设 $\angle KRA = \theta$, 即证 $\tan\theta = \tan\angle HBM$.

注意到

$$\begin{aligned}\tan\angle HBM &= \frac{\frac{CA}{2} - AB\cdot\cos A}{CA\cdot\sin A}\\ &= \frac{\frac{\sin(A+C)}{2} - \sin C\cos A}{\sin C\sin A}\\ &= \frac{\frac{1}{2}(\sin A\cos C - \sin C\cos A)}{\sin C\sin A}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin(A-C)}{2\sin C\sin A},$$

对 $\triangle APR$ 关于 K 用角元 Ceva 定理可得

$$\frac{\sin\angle KPA}{\sin\angle KPR}\cdot\frac{\sin(A-C-\theta)}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin 90^\circ}{\sin\angle KAP}=1,$$

即

$$\frac{\cos A}{\cos B}\cdot\frac{\sin(A-C)\cos\theta-\cos(A-C)\sin\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos A}=1.$$

则 $\frac{\sin(A-C)}{\tan\theta}-\cos(A-C)=\cos B$. 由

$$\tan\theta=\frac{\sin(A-C)}{\cos(A-C)-\cos(A+C)}=\frac{\sin(A-C)}{2\sin C\sin A}=\tan\angle HBM$$

可知 $\theta=\angle\angle HBM$, 故 $KR\perp BM$. □

评注 本题中证明两线垂直, 首先考虑倒角. 而图中大部分的角均可进行计算, 因此结合角元 Ceva 定理, 不难将其转化到已知的角, 再进行三角计算即可得证.

题 9-8. **平面上有若干个圆, 将它们相互之间的交点或切点标记出来. 是否可能每个圆恰含有 5 个被标记的点, 且每个被标记的点恰属于 5 个圆?**

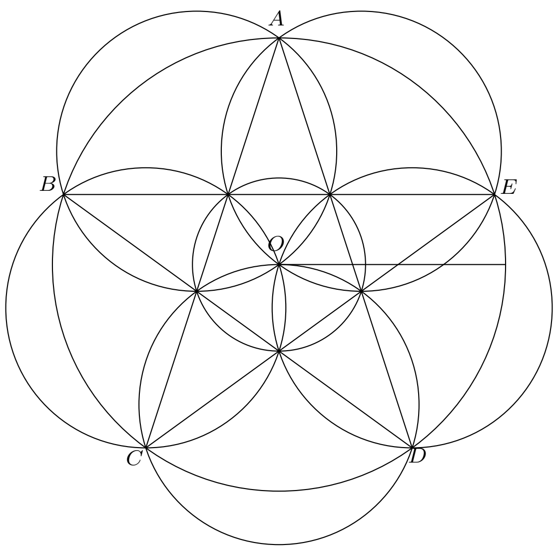

图 9-8

解 在 $\odot O$ 上取圆周的五等分点 A, B, C, D, E, 则如图的 7 个圆之间的每个交点, 都恰好属于 5 个圆, 且每个圆上恰好有 5 个交点. □

评注 本题可以先考虑比 5 小的数字, 比如 3 和 4, 这样说不定可以找到规律. 很容易会去考虑那些很对称的图形, 因为这样作图容易且说理清晰, 如果在 3和 4 的情况能有思路, 那么也基本上能够做出 5 的情况了.

题 10-1. 设 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 分别为两个正方形, 顶点按顺时针方向排列. 线段 $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ 的垂直平分线分别与线段 $A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_1B_1$ 的垂直平分线交于点 P, Q, R, S. 求证: $PR \perp QS$.

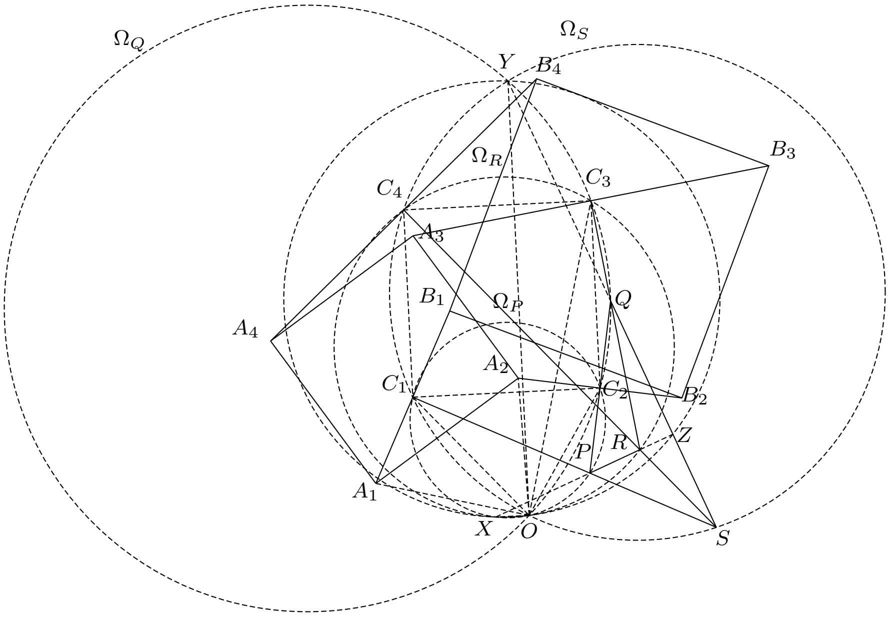

图 10-1

证明 (杨皓晨) 如图所示, 由于正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 旋转相似, 设该旋转相似变换的中心为点 O, 设 $C_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 为线段 A_iB_i 的中点, 则由相似性质知 $C_1C_2C_3C_4$ 是正方形. 用 $\langle l_1, l_2\rangle$ 表示两条直线 l_1, l_2 所夹锐角.

由于 $\angle C_1PC_2 = \langle A_1B_1, A_2B_2\rangle$ 及 $\angle C_1OC_2 = \angle A_1OA_2$ 都为正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 旋转相似的旋转角, 故它们相等, 从而 O, C_1, C_2, P 共圆 Ω_P. 同理 O, C_3, C_4, R 共圆 Ω_R.

设 Ω_P 与 Ω_R 的另一个交点为 X, 则有

$$\angle OXP = 180^\circ - \angle OC_1P = 90^\circ - \langle OC_1, A_1B_1\rangle,$$

同理 $\angle OXR = 90^\circ - \langle OC_3, A_3B_3\rangle$.

由旋转相似可知 $\langle OC_1, A_1B_1\rangle = \langle OC_3, A_3B_3\rangle$, 故 $\angle OXP = \angle OXR$, 从而 X, P, R 共线. 由 X 的定义可知 O, X 关于线段 C_1C_2 的中垂线(即 C_3C_4 的中垂线)对称, 故有 $OX \parallel C_1C_2$.

同理, 可定义 Ω_Q 与 Ω_S, 它们的另一个交点为 Y, 则 Y, Q, S 共线, $OY \parallel C_2C_3$, 故有 $OX \perp OY$. 设 PR, QS 交于点 Z, 由

$$\angle OYZ = 180^\circ - \angle OYS = 180^\circ - \angle OC_1S = 180^\circ - \angle OXP$$

可知 O, X, Y, Z 共圆. 所以, $\angle YZX = \angle YOX = 90^\circ$, 故 $PR \perp QS$ 得证. □

评注 本题构型较诡异但思路并不难, 属于中档题. 两个正方形, 对应顶点连线, 取中点, 作中垂线, 自然会想到取旋转相似的中心研究. 之后就不复杂了, 虽然图形复杂, 但注意到题中存在大量共圆结构便可迎刃而解.

题 10-2. 凸四边形 $ABCD$ 中, $\odot(ABC)$ 与 $\odot(ACD)$ 的外公切线交于点 E, $\odot(ABD)$ 与 $\odot(BCD)$ 的外公切线交于点 F, 且 F 在 AC 上. 求证: E 在 BD 上.

证明 (杨皓晨) 先证明下面的引理.

引理 设两圆 ω_1, ω_2 相交于 X, Y 两点, P 是线段 XY 中垂线上一点, 则 P 是这两圆的外位似中心的充要条件为: 过 P 任作一条直线 ℓ 与两圆交于 A, B, C, D 四点且 P, A, B, C, D 顺次排列, 有 $PX^2 = PB \cdot PC$.

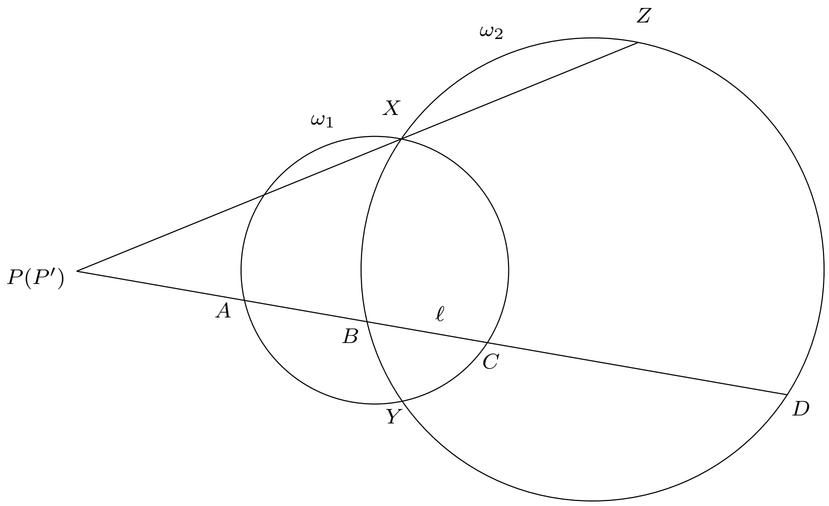

图 10-2. 1

证明 先证必要性. 若 P 是外位似中心, 设 PX 与 ω_2 的另一交点为 Z, 不妨 P, X, Z 顺次排列. 由位似性质, $CX \parallel DZ$. 又 B, X, Z, D 共圆, 故 $\angle PBX = \angle PZD = \angle PXC$, 于是 $\triangle PBX \sim \triangle PXC$, 可得 $PX^2 = PB \cdot PC$.

再证充分性. 取 ℓ 为过 P 且经过两圆圆心的直线, 由 $PX^2 = PB \cdot PC$ 可得 $\triangle PBX \sim \triangle PXC$. 记两圆外位似中心为 P', 则

$$\angle PXC = \angle PBX = \angle P'BX = \angle P'XC,$$

此即 $P' = P$. 引理得证.

回到原题. 由于 F 在 AC 上, 由引理有 $FA \cdot FC = FB^2$, 故 $\triangle FBA \sim \triangle FCB$, 即 $\frac{AB}{CB} = \frac{FA}{FB}$, 同理即 $\frac{AD}{CD} = \frac{FA}{FD}$, 由 $FB = FD$ 可知 $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{CB}$.

设 EB 交 $\overset{\frown}{ADC}$ 于点 D', 同理可得 $\frac{AD'}{CD'} = \frac{AB}{CB}$, 而满足 $\frac{AD}{CD}$ 等于定值的点 D 的位置是唯一的, 所以 $D = D'$, 故 E, D, B 共线, 得证. $\square$

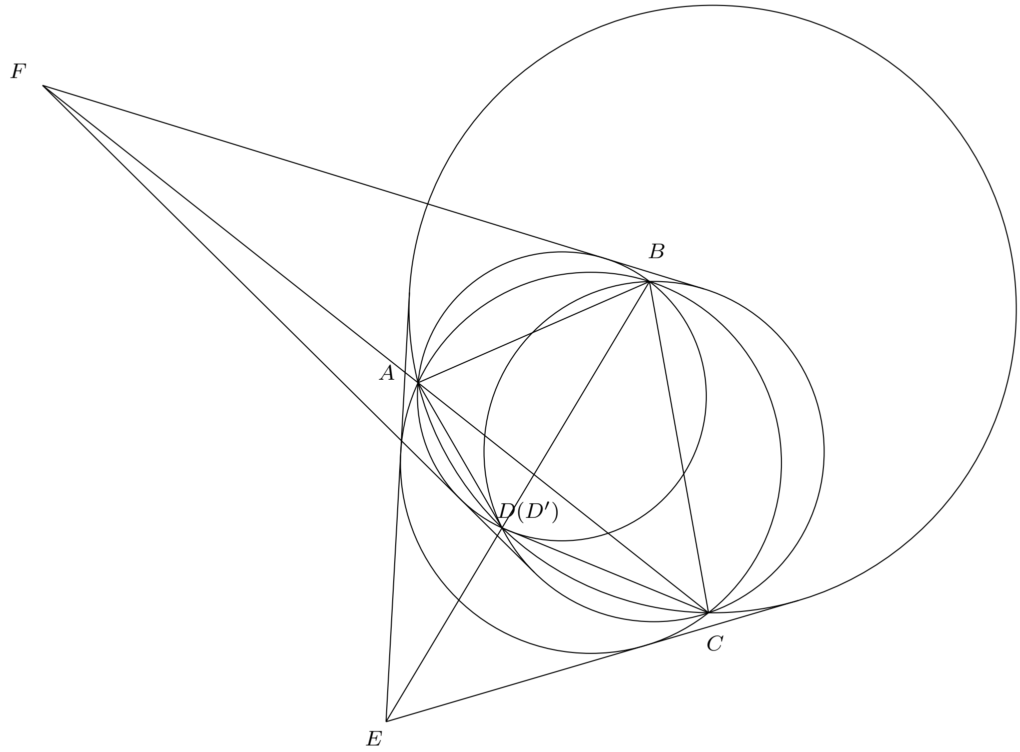

图 10-2. 2

评注 本题属于简单题. 引理事实上是一个熟知的结论, 在 2019 年冬令营 (CMO) 中也考察了类似的构型. 运用引理, 结合同一法可使过程更为简洁.

题 10-3. 直线 ℓ 与线段 AB 交于点 C. 点 X 在直线 ℓ 上, 且满足 $\angle AXC$ 恰为 $\angle BXC$ 的两倍或者一半. 求满足条件的点 X 的个数.

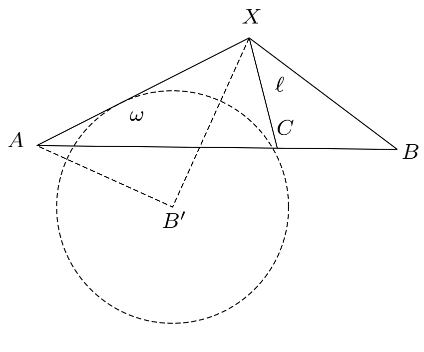

图 10-3

解 (杨皓晨) 所求的点 X 个数的最大值为 4.

一方面, 证明符合条件的点 X 不超过 4 个. 只需证: 满足 $\angle AXC = 2\angle BXC$ 的点 X 不超过 2 个.

设 B 关于 ℓ 的对称点为 B', 有 $\angle AXC = 2\angle BXC = 2\angle B'XC$, 即 XB' 平分 $\angle AXC$. 设以 B' 为圆心且与 ℓ 相切的圆为 ω, 由对称性可知 XA 亦与 ω 相切, 由于 A, ω 的位置均已确定, 知这样的 X 的位置最多有 2 个, 得证.

另一方面, 取 C 为 AB 中点, 作 ℓ 使得 ℓ 与 AB 所夹锐角 $\theta = 60°$. 设 ω 与 ℓ 切于点 X, 则 $B'A = 2CX = \frac{2B'X}{\tan\theta} > B'X$, 即点 A 在 ω 外部, 故存在过 A 的 ω 的两条切线, 由上述论证可知, 它们与 ℓ 的交点, 以及这两个交点关于 C 的对称点 (共 4个点) 都是合题的.

综上所述, 所求的点 X 个数的最大值为 4. □

评注 本题属于中档题. 本题与组合结合, 一上手会发现构造并不容易, 此时应从证明入手, 拿题目条件尝试往下推, 看能推出 X 的哪些性质. 证明出上界后, 再依“等号成立条件”构造, 就极自然了.

题 10-4. 凸四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = \angle D$. 求证: BD 的中点在 $\triangle ABC$ 内切圆与 $\triangle ACD$ 内切圆的内公切线上.

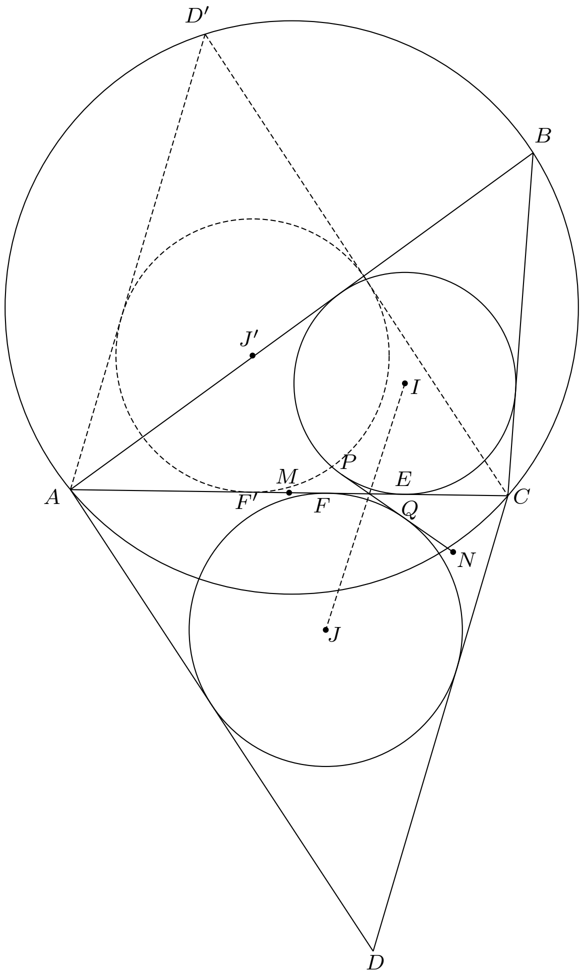

图 10-4

证明 (陈昱达) 设 AC 中点为 M, BD 中点为 N, $\triangle ABC, \triangle ADC$ 的内切圆分别为 $\odot I, \odot J$, 分别与 BC 切于 E, F. 再设 D', F', J' 分别是 D, F, J 关于

M 的对称点, P,Q 分别为 E,F 关于 IJ 的对称点. 易知 PQ 为 $\odot I$ 和 $\odot J$ 的内公切线, 下证 P,Q,N 共线.

以 $\odot(ABC)$ 为单位圆, 其圆心为原点建立复平面. 设 $A=a^2,B=b^2,C=c^2,D'=d^2$ (显然 D' 在圆上). 规定 $0<\arg B<\arg A<\arg C<2\pi,0<\arg D'<\arg A<\arg C<2\pi,0<\arg b<\pi,0<\arg d<\pi,\pi<\arg a<2\pi,0<\arg c<\pi$. 则由复数的内心公式可得

$$I=-ab-bc-ca,J'=-ad-dc-ca.$$

点 E 为 I 在 AC 上的投影, 故

$$E=\frac{A+C+I-AC\overline{I}}{2}=\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{(a+c)(ac-b^2)}{2b}.$$

同理 $F'=\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{(a+c)(ac-d^2)}{2d}$.

由中心对称可知

$$F=2M-F'=\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{(a+c)(d^2-ac)}{2d},$$
$$J=a^2+c^2+ad+dc+ca,D=a^2+c^2-d^2.$$

再由对称点公式可知

$$P=\frac{I(\overline{E}-\overline{J})-J(\overline{E}-\overline{I})}{\overline{I}-\overline{J}},Q=\frac{I(\overline{F}-\overline{J})-J(\overline{F}-\overline{I})}{\overline{I}-\overline{J}}.$$

下面说明 $\frac{N-P}{N-Q}$ 为实数:

$$\frac{N-P}{N-Q}=\frac{N\overline{I}-N\overline{J}-I\overline{E}+I\overline{J}-J\overline{E}+J\overline{I}}{N\overline{I}-N\overline{J}-I\overline{F}+I\overline{J}-J\overline{F}+J\overline{I}},$$

化简得到

$$\begin{aligned}\frac{N-P}{N-Q}&=\frac{-abc^2+abd^2+acd^2-ab^2c+bcd^2-a^2bc}{acd^2-ab^2c-ab^2d+ac^2d+a^2cd-b^2cd}\\&=\frac{-\frac{c}{d}+\frac{d}{c}+\frac{d}{b}-\frac{b}{d}+\frac{d}{a}-\frac{a}{d}}{\frac{d}{b}-\frac{b}{d}-\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}.\end{aligned}$$

注意到上式的分子和分母均为纯虚数(均可写为共轭复数之差), 因此 $\frac{N-P}{N-Q}$ 为实数, 这表明 P,Q,N 共线. □

评注 本题较为复杂, 若采用复数法, 则思路相对自然, 只需证明比例为实数即可, 唯一的缺点是计算量较大. 官方答案中采用的方法是利用 Feuerbach 定理, 结合 Casey 定理进行边的计算, 过程较笔者的更短, 但思路上也更难想到.

题 10-5. 过点 A 作圆 Ω 的两条切线, 切点分别为 B,C. 设 M 为 BC 中点, P 为线段 BC 上任意一点. 直线 AP 与 Ω 交于点 D,E. 求证: $\odot(MDP)$ 与 $\odot(MEP)$ 的两条外公切线的交点在 $\triangle ABC$ 的中位线上.

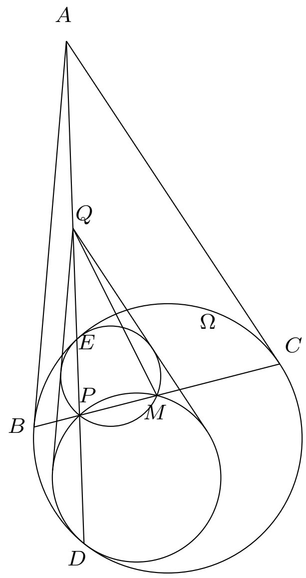

图 10-5

证明 (杨皓晨) 设 AP 中点为 Q, 则 Q 在 $\triangle ABC$ 的中位线上. 由于 A, E, P, D 为调和点列, Q 为 AP 中点, 故 $QE \cdot QD = QP^2$.

又由于 $AM \perp BC$, 有 $QP = QC$. 根据前文中题 10-2 的引理, 点 Q 即是 $\triangle EPM$ 外接圆与 $\triangle DPM$ 外接圆的外位似中心 (因为满足以上两条性质的点 Q 的位置显然是唯一的), 因此, 本题得证. □

评注 本题属于简单题. 只要熟悉调和结构无甚技术含量, 但需再次强调该引理的重要性.

题 10-6. 设 O, I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和内心, P 为线段 OI 上任意一点, 直线 PA, PB, PC 分别与 $\triangle ABC$ 的外接圆再次相交于点 P_A, P_B, P_C. 求证: $\angle BP_AC, \angle CP_BA, \angle AP_C$ 的角平分线交于直线 OI 上的一点.

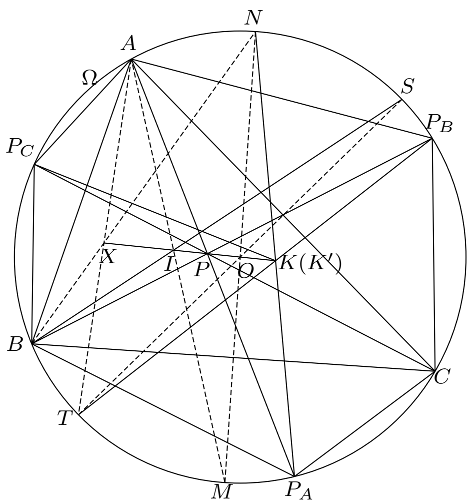

图 10-6

证明 (杨皓晨) 设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Ω, $\angle BP_AC$ 与 $\angle CP_BA$ 的角平分线交于点 K, AI, P_AK 与 Ω 的另一交点分别为 M, N, 则 MN 为 Ω 的直径, 故 MN 过点 O. 类似地, 设 BI, P_BK 与 Ω 的另一交点分别为 S, T, 则 ST 也过点 O.

设 AT, BN 交于点 X, 在六边形 NP_AATP_BB 中, 由帕斯卡定理知 X, P, K 共线; 在六边形 $ATSBNM$ 中, 由帕斯卡定理知 X, I, O 共线. 又 I, P, O 共线, 故 X, I, P, O, K 五点共线, 故 K 在 OI 上. 同理, $\angle BP_AC$ 与 $\angle BP_CA$ 的角平分线的交点 K' 也在 OI 上, 故 K, K' 均为 $\angle BP_AC$ 的角平分线与 OI 的交点, 即 $K' = K$, 也就证明了原题. □

评注 本题属于简单题. 画出图后即会意识到题中有大量的帕斯卡结构, 故尝试构造帕斯卡定理相关的图形, 以中间点 X 作桥梁, 是这种问题常见的“套路”.

题 10-7. 平面上有若干个圆, 将它们相互之间的交点或切点标记出来. 是否可能每个圆恰含有 4 个被标记的点, 且每个被标记的点恰属于 4 个圆?

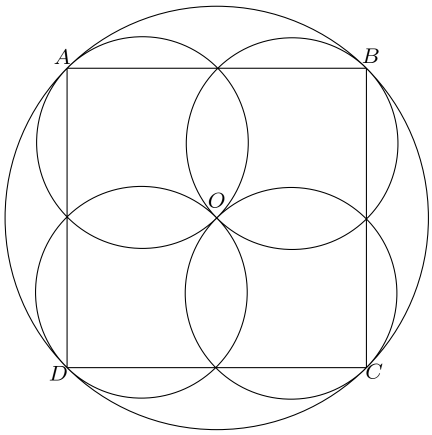

图 10-7

解 在 $\odot O$ 上取圆周的四等分点 A, B, C, D, 则如图的 5 个圆之间的每个交点, 都恰好属于 4 个圆, 且每个圆上恰好有 4 个交点. □

评注 事实上, 本题对于 2, 3, 4, 5 的情况均成立, 但大于 5 的情况还尚不清楚.

题 10-8. 设 $ABCA'B'C'$ 为一个中心对称的八面体.其中 A 与 A' 相对, B 与 B' 相对, C 与 C' 相对.且对任意一个顶点, 其所在的四个平面角度数之和为 $240°$. 记 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'BC$ 的 Torricelli 点分别为 T_1, T_2. 求证: T_1, T_2 到 BC 的距离相等.

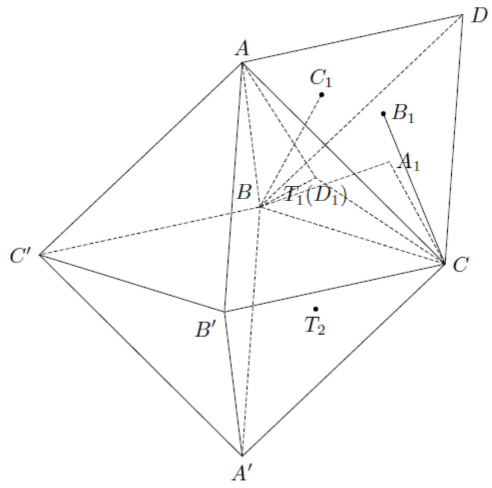

图 10-8

证明 设 D 是满足 $AB'CD$ 为平行四边形的点. 则四面体 $ABCD$ 的四个面分别全等于八面体的 $ABCA'B'C'$ 的八个面(如 $\triangle A'BC \cong \triangle AB'C' \cong \triangle DCB$ 的四组全等), 并且该四面体的四个无临边对角之和(如 $\angle CAD + \angle CBD + \angle ACB + \angle ADB$)等于 240°. 设 A_1, B_1, C_1, D_1 分别为四面体的内切球与面 BCD, CDA, DAB, ABC 的切点. 由上述全等及对称性可知, T_2 与 $\triangle BCD$ 的 Torricelli 点关于 BC 对称, 故只需说明 $\triangle BCD, \triangle ABC$ 的 Torricelli 点到 BC 距离相等.

可知 $\triangle A_1BC \cong \triangle D_1BC$, 另外的五组三角形也类似地全等. 因此 $\angle BD_1C + \angle BA_1C = \angle BAC + \angle ABD_1 + \angle ACD_1 + \angle BDC + \angle DCA_1 + \angle DBA_1 = \angle BAC + \angle BDC + \angle ABC_1 + \angle ACB_1 + \angle DCB_1 + \angle DBC_1 = 240°$, 则 $\angle BD_1C = \angle BA_1C = 120°$. 故类似地有 $\angle AD_1B = \angle AD_1C = \angle BA_1C = \angle BA_1D = 120°$, 这表明 A_1, D_1 分别是 $\triangle BCD, \triangle ABC$ 的 Torricelli 点, 由 $\triangle A_1BC \cong \triangle D_1BC$ 可知 A_1, D_1 到 BC 距离相等, 故结论成立. □

评注 不同于以往年份的压轴题, 本题的解答过程并不十分复杂, 但对图形的空间想象能力要求甚高, 还需注意到 240° 的用途以及联系起 Torricelli 的定义. 因此虽然本题过程不长, 但难度相当大.

参考文献

[1] 赵力. 2022 沙雷金数学奥林匹克决赛 9 年级组 [Z/OL]. 微信公众号“久霖竞赛田”. 2022.8.3

[2] 龙崎钢. 2022 沙雷金数学奥林匹克决赛 10 年级组 [Z/OL]. 微信公众号“久霖竞赛田”. 2022.8.6